ME731 - Métodos em Análise Multivariada
– Análise Fatorial I –

Prof. Carlos Trucíos
ctrucios@unicamp.br
ctruciosm.github.io

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica,
Universidade Estadual de Campinas

Aula 13

UNICAMP

Agenda I

Introdução

Introdução

- **Caso 1:** suponha que estamos interessados em estudar o desenvolvimento humano dos paises do mundo e que dispomos de um conjunto de variáveis econômicas, sociais e demográficas relacionadas com desenvolvimento humano.

Introdução

- **Caso 1:** suponha que estamos interessados em estudar o desenvolvimento humano dos paises do mundo e que dispomos de um conjunto de variáveis econômicas, sociais e demográficas relacionadas com desenvolvimento humano. Uma pergunta interessante é se o desenvolvimento de um pais pode ser explicado por um pequeno número de fatores tais que, conhecidos seus valores, poderiamos conhecer o conjunto de variáveis de cada pais.

Introdução

- **Caso 1:** suponha que estamos interessados em estudar o desenvolvimento humano dos paises do mundo e que dispomos de um conjunto de variáveis econômicas, sociais e demográficas relacionadas com desenvolvimento humano. Uma pergunta interessante é se o desenvolvimento de um pais pode ser explicado por um pequeno número de fatores tais que, conhecidos seus valores, poderiamos conhecer o conjunto de variáveis de cada pais.
- **Caso 2:** suponha que medimos, através de diversos testes, a capacidade mental de indivíduos para processar informação e resolver problemas.

Introdução

- **Caso 1:** suponha que estamos interessados em estudar o desenvolvimento humano dos paises do mundo e que dispomos de um conjunto de variáveis econômicas, sociais e demográficas relacionadas com desenvolvimento humano. Uma pergunta interessante é se o desenvolvimento de um pais pode ser explicado por um pequeno número de fatores tais que, conhecidos seus valores, poderiamos conhecer o conjunto de variáveis de cada pais.
- **Caso 2:** suponha que medimos, através de diversos testes, a capacidade mental de indivíduos para processar informação e resolver problemas. Será que existem fatores, não diretamente observáveis, que explicam os resultados observados?

Introdução

- **Caso 1:** suponha que estamos interessados em estudar o desenvolvimento humano dos paises do mundo e que dispomos de um conjunto de variáveis econômicas, sociais e demográficas relacionadas com desenvolvimento humano. Uma pergunta interessante é se o desenvolvimento de um pais pode ser explicado por um pequeno número de fatores tais que, conhecidos seus valores, poderiamos conhecer o conjunto de variáveis de cada pais.
- **Caso 2:** suponha que medimos, através de diversos testes, a capacidade mental de indivíduos para processar informação e resolver problemas. Será que existem fatores, não diretamente observáveis, que explicam os resultados observados? (esses fatores seriam a *inteligência*, por exemplo).

Introdução

- **Caso 1:** suponha que estamos interessados em estudar o desenvolvimento humano dos paises do mundo e que dispomos de um conjunto de variáveis econômicas, sociais e demográficas relacionadas com desenvolvimento humano. Uma pergunta interessante é se o desenvolvimento de um pais pode ser explicado por um pequeno número de fatores tais que, conhecidos seus valores, poderiamos conhecer o conjunto de variáveis de cada pais.
- **Caso 2:** suponha que medimos, através de diversos testes, a capacidade mental de indivíduos para processar informação e resolver problemas. Será que existem fatores, não diretamente observáveis, que explicam os resultados observados? (esses fatores seriam a *inteligência*, por exemplo).

Fonte: Análisis de Datos Multivariantes (Daniel Peña, 2002)

Introdução

- Análise Fatorial tem como objetivo explicar um conjunto de variáveis através de um pequeno número de variáveis latentes (chamadas de *fatores*).

Introdução

- Análise Fatorial tem como objetivo explicar um conjunto de variáveis através de um pequeno número de variáveis latentes (chamadas de *fatores*).
- Desde outro ponto de vista, análise fatorial tenta explicar a correlação de um conjunto de variáveis através de um número pequeno de fatores (veremos que ambos pontos de vista implicam no mesmo problema).

Introdução

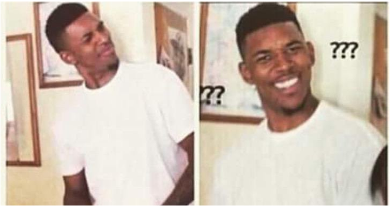
- Análise Fatorial tem como objetivo explicar um conjunto de variáveis através de um pequeno número de variáveis latentes (chamadas de *fatores*).
- Desde outro ponto de vista, análise fatorial tenta explicar a correlação de um conjunto de variáveis através de um número pequeno de fatores (veremos que ambos pontos de vista implicam no mesmo problema).
- Embora as variáveis dependam de fatores, também estão sujeitas a perturbações aleatórias.

Introdução

- Análise Fatorial tem como objetivo explicar um conjunto de variáveis através de um pequeno número de variáveis latentes (chamadas de *fatores*).
- Desde outro ponto de vista, análise fatorial tenta explicar a correlação de um conjunto de variáveis através de um número pequeno de fatores (veremos que ambos pontos de vista implicam no mesmo problema).
- Embora as variáveis dependam de fatores, também estão sujeitas a perturbações aleatórias.
- Os fatores não são observados diretamente.

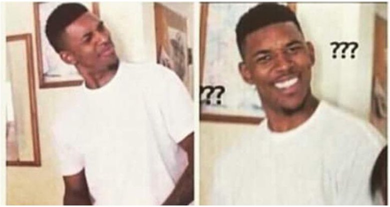
Introdução

Variáveis não observáveis?



Introdução

Variáveis não observáveis?



- Esse conceito é bastante comúm em psicologia onde aquilo que queremos mensurar não é diretamente observavel (*inteligência*, por exemplo).
- Entre as àreas nas quais está técnica é utilizada temos: marketing, economia, finanças, ciência política, psicología, etc.

Motivação

Motivação

Um estudo aplicado em crianças mede o desepenho delas em Espanhol (X_1), Português (X_2) e Inglês (X_3).

A Matriz de correlação entre as três variáveis é dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.83 & 0.78 \\ 0.83 & 1 & 0.67 \\ 0.78 & 0.67 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivação

Um estudo aplicado em crianças mede o desepenho delas em Espanhol (X_1), Português (X_2) e Inglês (X_3).

A Matriz de correlação entre as três variáveis é dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.83 & 0.78 \\ 0.83 & 1 & 0.67 \\ 0.78 & 0.67 & 1 \end{pmatrix}$$

E se existir um fator (latente) que nos ajude a entender essa correlação toda?

Motivação

Se existir esse fator, podemos reescrever as três variáveis da seguinte forma:

$$X_1 = \lambda_1 f + u_1, \quad X_2 = \lambda_2 f + u_2, \quad X_3 = \lambda_3 f + u_3,$$

em que

Motivação

Se existir esse fator, podemos reescrever as três variáveis da seguinte forma:

$$X_1 = \lambda_1 f + u_1, \quad X_2 = \lambda_2 f + u_2, \quad X_3 = \lambda_3 f + u_3,$$

em que

- f é um *fator comum* não observavel,
- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são *cargas fatoriais*,
- u_1, u_2, u_3 são perturbações aleatórias.

f pode ser entendido como uma *habilidade geral* e u_i terá uma variabilidade pequena se x_i estiver estreitamente relacionada com essa *habilidade geral*.

Modelo Fatorial

Modelo Fatorial

Seja $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_p)' \sim (\mu, \Sigma)$. Dizemos que o modelo fatorial (com k fatores) de $\mathbf{X}$ acontece se podemos escrever

$$\mathbf{X} = \mu + \Lambda f + \mathbf{u}$$

Modelo Fatorial

Seja $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_p)' \sim (\mu, \Sigma)$. Dizemos que o modelo fatorial (com k fatores) de $\mathbf{X}$ acontece se podemos escrever

$$\mathbf{X} = \mu + \Lambda f + \mathbf{u}$$

- $\Lambda_{p \times k}$ é uma matriz de constantes,
- $f_{k \times 1}$ e $\mathbf{u}_{p \times 1}$ são vetores aleatórios.

Modelo Fatorial

Seja $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_p)' \sim (\mu, \Sigma)$. Dizemos que o modelo fatorial (com k fatores) de $\mathbf{X}$ acontece se podemos escrever

$$\mathbf{X} = \mu + \Lambda f + \mathbf{u}$$

- $\Lambda_{p\times k}$ é uma matriz de constantes,
- $f_{k\times 1}$ e $\mathbf{u}_{p\times 1}$ são vetores aleatórios.

Os elementos de f são chamados *fatores comuns* (ou simplesmente *fatores*) e os elementos de $\mathbf{u}$ chamados de *fatores específicos*, *fatores únicos* ou *fatores idiossincráticos*.

Modelo Fatorial

Seja $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_p)' \sim (\mu, \Sigma)$. Dizemos que o modelo fatorial (com k fatores) de $\mathbf{X}$ acontece se podemos escrever

$$\mathbf{X} = \mu + \Lambda f + \mathbf{u}$$

- $\Lambda_{p \times k}$ é uma matriz de constantes,
- $f_{k \times 1}$ e $\mathbf{u}_{p \times 1}$ são vetores aleatórios.

Os elementos de f são chamados *fatores comuns* (ou simplesmente *fatores*) e os elementos de $\mathbf{u}$ chamados de *fatores específicos*, *fatores únicos* ou *fatores idiossincráticos*.

O modelo é construido sob algumas suposições, as quais são apresentadas a seguir:

Modelo Fatorial: Suposições

- $\mathbb{E}(f) = 0 \quad e \quad \mathbb{V}(f) = \mathbf{I}$,
- $\mathbb{E}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbb{C}ov(u_i, u_j) = 0 \quad e \quad \mathbb{C}ov(f, \mathbf{u}) = 0$
- Consequentemente, $\mathbb{V}(u) = \mathbf{\Psi} = Diag\{\psi_1, \cdots, \psi_p\}$

Modelo Fatorial: Suposições

- $\mathbb{E}(f) = 0 \quad e \quad \mathbb{V}(f) = \mathbf{I}$,
- $\mathbb{E}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbb{C}ov(u_i, u_j) = 0 \quad e \quad \mathbb{C}ov(f, \mathbf{u}) = 0$
- Consequentemente, $\mathbb{V}(u) = \mathbf{\Psi} = Diag\{\psi_1, \cdots, \psi_p\}$

Os fatores comuns são não correlacionados (entre eles mesmos e com os fatores idiossincráticos), têm média zero e variância um.

Modelo Fatorial: Suposições

- $\mathbb{E}(f) = 0 \quad e \quad \mathbb{V}(f) = \mathbf{I}$,
- $\mathbb{E}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbb{C}ov(u_i, u_j) = 0 \quad e \quad \mathbb{C}ov(f, \mathbf{u}) = 0$
- Consequentemente, $\mathbb{V}(u) = \mathbf{\Psi} = Diag\{\psi_1, \cdots, \psi_p\}$

Os fatores comuns são não correlacionados (entre eles mesmos e com os fatores idiossincráticos), têm média zero e variância um.

- Outra suposição às vezes utilizada é que tanto f quanto $\mathbf{u}$ tem distribuição Normal multivariada.

Modelo Fatorial

Modelo Fatorial: $\mathbf{X} = \mu + \Lambda f + \mathbf{u}$,

Pode-se obter facilmente que $X_i = \mu_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} f_j + u_i, \quad i = 1, \cdots, p.$

Modelo Fatorial

Modelo Fatorial: $\mathbf{X} = \mu + \Lambda f + \mathbf{u}$,

Pode-se obter facilmente que $X_i = \mu_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} f_j + u_i, \quad i = 1, \cdots, p.$

Assim, $\mathbb{V}(X_i) = \sigma_i^2 = \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij}^2}_{h_i^2} + \psi_i^2 = h_i^2 + \psi_i^2$

Modelo Fatorial

Modelo Fatorial: $\mathbf{X} = \mu + \Lambda f + \mathbf{u}$,

Pode-se obter facilmente que $X_i = \mu_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} f_j + u_i, \quad i = 1, \cdots, p.$

Assim, $\mathbb{V}(X_i) = \sigma_i^2 = \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij}^2}_{h_i^2} + \psi_i^2 = h_i^2 + \psi_i^2$

- h_i^2: é chamada de *comunalidade* (variância comum) e representa a variância de X_i que é explicada pelos *fatores comuns*.
- ψ_i^2: é chamada de *variância específica* e representa a variabilidade de X_i que não é explicada pelos *fatores comuns*.

Modelo Fatorial

Modelo Fatorial: $\mathbf{X} = \mu + \Lambda f + \mathbf{u},$

Modelo Fatorial

Modelo Fatorial: $\mathbf{X} = \mu + \Lambda f + \mathbf{u}$,

Se o modelo fatorial acontece, então $\mathbb{V}(\mathbf{X})$, denotada por Σ é dada por

$$\mathbb{V}(\mathbf{X}) = \Sigma = \Lambda\Lambda' + \mathbf{\Psi} \tag{1}$$

O contrário também é valido. Se (1) acontece, então o modelo fatorial acontece para $\mathbf{X}$.

Modelo Fatorial

Propriedades:

$$\mathbb{C}ov(\mathbf{X}, f) = \Lambda$$

Modelo Fatorial

Propriedades:

$$\mathbb{C}ov(\mathbf{X}, f) = \Lambda$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov(\mathbf{X}, f) &= \mathbb{C}ov(\mu + \Lambda f + \mathbf{u}, f) & (2)\\
&= \Lambda \underbrace{\mathbb{C}ov(f, f)}_{\mathbf{I}} + \underbrace{\mathbb{C}ov(\mathbf{u}, f)}_{0} & (3)\\
&= \Lambda & (4)
\end{aligned}$$

Modelo Factorial: Invariância

Propriedades:

Seja $C = diag\{c_1, \cdots, c_p\}$, o que acontece se mudamos a escala de $\mathbf{X}$ para $\mathbf{Y} = C\mathbf{X}$?

Modelo Factorial: Invariância

Propriedades:

Seja $C = diag\{c_1, \cdots, c_p\}$, o que acontece se mudamos a escala de $\mathbf{X}$ para $\mathbf{Y} = C\mathbf{X}$?

Se o modelo fatorial acontecer para $\mathbf{X}$ temos que $\mathbf{X} = \mu + \Lambda f + \mathbf{u}$

Modelo Factorial: Invariância

Propriedades:

Seja $C = diag\{c_1, \cdots, c_p\}$, o que acontece se mudamos a escala de $\mathbf{X}$ para $\mathbf{Y} = C\mathbf{X}$?

Se o modelo fatorial acontecer para $\mathbf{X}$ temos que $\mathbf{X} = \mu + \Lambda f + \mathbf{u}$

Então,

- $\mathbf{Y} = C\mathbf{X} = \underbrace{C\mu}_{\mu_y} + \underbrace{C\Lambda}_{\Lambda_y} f + \underbrace{C\mathbf{u}}_{\mathbf{u}_y}$
- $\mathbb{V}(\mathbf{Y}) = \mathbb{V}(C\mathbf{X}) = C\mathbb{V}(X)C' = C[\Lambda\Lambda' + \mathbf{\Psi}]C' = \underbrace{C\Lambda}_{\Lambda_y}\underbrace{\Lambda' C'}_{\Lambda'_y} + \underbrace{C\mathbf{\Psi}C'}_{\mathbf{\Psi}_{\mathbf{u}_y}}$

Modelo Factorial: Invariância

Propriedades:

Seja $C = diag\{c_1, \cdots, c_p\}$, o que acontece se mudamos a escala de $\mathbf{X}$ para $\mathbf{Y} = C\mathbf{X}$?

Se o modelo fatorial acontecer para $\mathbf{X}$ temos que $\mathbf{X} = \mu + \Lambda f + \mathbf{u}$

Então,

- $\mathbf{Y} = C\mathbf{X} = \underbrace{C\mu}_{\mu_y} + \underbrace{C\Lambda}_{\Lambda_y} f + \underbrace{C\mathbf{u}}_{\mathbf{u}_y}$
- $\mathbb{V}(\mathbf{Y}) = \mathbb{V}(C\mathbf{X}) = C\mathbb{V}(X)C' = C[\Lambda\Lambda' + \mathbf{\Psi}]C' = \underbrace{C\Lambda}_{\Lambda_y}\underbrace{\Lambda' C'}_{\Lambda_y'} + \underbrace{C\mathbf{\Psi} C'}_{\mathbf{\Psi}_{\mathbf{u}_y}}$

O modelo fatorial também acontece para $\mathbf{Y}$, tem matriz de cargas fatoriais dada por $\Lambda_y = C\Lambda$, variância específica $\mathbf{\Psi}_{\mathbf{u}_y} = C\mathbf{\Psi}C$ e fator f.

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

As cargas fatoriais **não** são únicas!

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

As cargas fatoriais **não** são únicas!

Seja o modelo fatorial para $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \mu + \Lambda f + \mathbf{u},$$

e seja G uma matriz ortogonal qualquer. Então,

$$\mathbf{X} = \mu + \Lambda G(G'f) + \mathbf{u}.$$

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

As cargas fatoriais **não** são únicas!

Seja o modelo fatorial para $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \mu + \Lambda f + \mathbf{u},$$

e seja G uma matriz ortogonal qualquer. Então,

$$\mathbf{X} = \mu + \Lambda G(G'f) + \mathbf{u}.$$

- Se f e Λ são os fatores e as cargas fatoriais para $\mathbf{X}$, então $G'f$ e ΛG também são.

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

As cargas fatoriais **não** são únicas!

Seja o modelo fatorial para $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \mu + \Lambda f + \mathbf{u},$$

e seja G uma matriz ortogonal qualquer. Então,

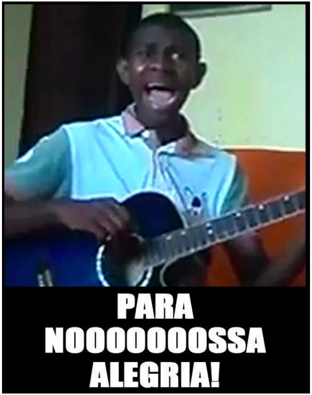
$$\mathbf{X} = \mu + \Lambda G(G'f) + \mathbf{u}.$$

- Se f e Λ são os fatores e as cargas fatoriais para $\mathbf{X}$, então $G'f$ e ΛG também são.
- **Isto é bom ou ruim?**

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

Pros:

- Premultiplicar f por uma matriz ortogonal corresponde a uma rotação do sistema de coordenadas.
- A direção do primeiro eixo será dada pela primeira linha da matriz ortogonal.
- Escolher uma rotação apropriadas resultará em uma matriz de cargas ΛG que é **mais facil de interpretar!**



Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

Contras:

- Desde um ponto de vista numérico, a não unicidade é um problema.
- Temos que encontrar matrices Λ e $\boldsymbol{\Psi}$ tais que $\Sigma = \Lambda\Lambda' + \boldsymbol{\Psi}$. Infelizmente numericamente isto não é tão simples devido à multiplicicade da solução.

O problema pode ser contornado impondo restrições para obter uma única solução à decomposição (e depois dessa solução podemos tomar vantagem das rotações).

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

Quais restrições vamos a impor para eliminar o problema da não unicidade?

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

Quais restrições vamos a impor para eliminar o problema da não unicidade?

$$\Lambda'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\Lambda \quad ou \quad \Lambda'\boldsymbol{D}^{-1}\Lambda \quad \text{ser diagonal.} \tag{5}$$

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

Quais restrições vamos a impor para eliminar o problema da não unicidade?

$$\Lambda'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\Lambda \quad ou \quad \Lambda'\boldsymbol{D}^{-1}\Lambda \quad \text{ser diagonal.} \tag{5}$$

- Note que Σ tem $p(p+1)/2$ parametros a serem estimados.
- Por outro lado $\Lambda'\Lambda + \boldsymbol{\Psi}$ tem $pk + p$ parametros a serem estimados (pk vindo de $\Lambda_{p\times k}$ e p vindos de $\boldsymbol{\Psi}$).
- (5) introduze $k(k-1)/2$ restrições.
- Assim, o número de graus de liberade do modelo fatorial é

$$d = \frac{1}{2}p(p+1) - [(pk+p) - \frac{1}{2}k(k-1)] = \frac{1}{2}(p-k)^2 - \frac{1}{2}(p+k).$$

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

$$d = \frac{1}{2}p(p+1) - [(pk+p) - \frac{1}{2}k(k-1)] = \frac{1}{2}(p-k)^2 - \frac{1}{2}(p+k).$$

- **Se** $d < 0$, o modelo é indeterminado.

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

$$d = \frac{1}{2}p(p+1) - [(pk+p) - \frac{1}{2}k(k-1)] = \frac{1}{2}(p-k)^2 - \frac{1}{2}(p+k).$$

- **Se** $d < 0$, o modelo é indeterminado. (isto significa que o número de parâmetros do modelo fatorial é maior do que o número de paràmetros do modelo original. Reduzir k pode ajudar).

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

$$d = \frac{1}{2}p(p+1) - [(pk+p) - \frac{1}{2}k(k-1)] = \frac{1}{2}(p-k)^2 - \frac{1}{2}(p+k).$$

- **Se** $d < 0$, o modelo é indeterminado. (isto significa que o número de parâmetros do modelo fatorial é maior do que o número de paràmetros do modelo original. Reduzir k pode ajudar).
- **Se** $d = 0$, o modelo tem solução única (exceto, é claro, pelas rotações).

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

$$d = \frac{1}{2}p(p+1) - [(pk+p) - \frac{1}{2}k(k-1)] = \frac{1}{2}(p-k)^2 - \frac{1}{2}(p+k).$$

- **Se** $d < 0$, o modelo é indeterminado. (isto significa que o número de parâmetros do modelo fatorial é maior do que o número de paràmetros do modelo original. Reduzir k pode ajudar).
- **Se** $d = 0$, o modelo tem solução única (exceto, é claro, pelas rotações).
- **Se** $d > 0$ (o que mais acontece na prática), temos mais equações do que parâmetros e não existe uma solução exata

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

$$d = \frac{1}{2}p(p+1) - [(pk+p) - \frac{1}{2}k(k-1)] = \frac{1}{2}(p-k)^2 - \frac{1}{2}(p+k).$$

- **Se** $d < 0$, o modelo é indeterminado. (isto significa que o número de parâmetros do modelo fatorial é maior do que o número de paràmetros do modelo original. Reduzir k pode ajudar).
- **Se** $d = 0$, o modelo tem solução única (exceto, é claro, pelas rotações).
- **Se** $d > 0$ (o que mais acontece na prática), temos mais equações do que parâmetros e não existe uma solução exata (nestes casos, soluções aproximadas são utilizadas).

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

$$d = \frac{1}{2}p(p+1) - [(pk+p) - \frac{1}{2}k(k-1)] = \frac{1}{2}(p-k)^2 - \frac{1}{2}(p+k).$$

- **Se** $d < 0$, o modelo é indeterminado. (isto significa que o número de parâmetros do modelo fatorial é maior do que o número de paràmetros do modelo original. Reduzir k pode ajudar).
- **Se** $d = 0$, o modelo tem solução única (exceto, é claro, pelas rotações).
- **Se** $d > 0$ (o que mais acontece na prática), temos mais equações do que parâmetros e não existe uma solução exata (nestes casos, soluções aproximadas são utilizadas).

Para pensar: Se tivermos $p = 4$ variáveis, utilizaria $k = 2$ fatores?

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

Exemplo 1:

Suponha $p = 2$, $k = 1$ e seja

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \Lambda\Lambda' + \boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \psi_{11} & \lambda_1\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_2 & \lambda_2^2 + \psi_{22} \end{pmatrix}$$

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

Exemplo 1:

Suponha $p = 2$, $k = 1$ e seja

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \Lambda\Lambda' + \boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \psi_{11} & \lambda_1\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_2 & \lambda_2^2 + \psi_{22} \end{pmatrix}$$

- $1 = \lambda_1^2 + \psi_{11}$, $\rho = \lambda_1\lambda_2$ e $1 = \lambda_2^2 + \psi_{22}$.

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

Exemplo 1:

Suponha $p = 2$, $k = 1$ e seja

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \Lambda\Lambda' + \boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \psi_{11} & \lambda_1\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_2 & \lambda_2^2 + \psi_{22} \end{pmatrix}$$

- $1 = \lambda_1^2 + \psi_{11}$, $\rho = \lambda_1\lambda_2$ e $1 = \lambda_2^2 + \psi_{22}$.
- $\lambda_2 = \rho/\lambda_1$, $\psi_{11} = 1 - \lambda_1^2$ e $\psi_{22} = 1 - (\rho/\lambda_1)^2$

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

Exemplo 1:

Suponha $p = 2$, $k = 1$ e seja

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \Lambda\Lambda' + \boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \psi_{11} & \lambda_1\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_2 & \lambda_2^2 + \psi_{22} \end{pmatrix}$$

- $1 = \lambda_1^2 + \psi_{11}$, $\rho = \lambda_1\lambda_2$ e $1 = \lambda_2^2 + \psi_{22}$.
- $\lambda_2 = \rho/\lambda_1$, $\psi_{11} = 1 - \lambda_1^2$ e $\psi_{22} = 1 - (\rho/\lambda_1)^2$

Infinitas soluções! (o sistema é indeterminado)

$$d = \frac{1}{2}(p-k)^2 - \frac{1}{2}(p+k) = -1$$

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

Exemplo 2:

Suponha $p = 3$, $k = 1$ e seja

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \psi_{11} & \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2 & \lambda_2^2 + \psi_{22} & \lambda_2\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_3 & \lambda_2\lambda_3 & \lambda_3^2 + \psi_{33} \end{pmatrix}$$

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

Exemplo 2:

Suponha $p = 3$, $k = 1$ e seja

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \psi_{11} & \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2 & \lambda_2^2 + \psi_{22} & \lambda_2\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_3 & \lambda_2\lambda_3 & \lambda_3^2 + \psi_{33} \end{pmatrix}$$

Então,

- $\lambda_1^2 = \dfrac{\sigma_{12}\sigma_{13}}{\sigma_{23}}$, $\lambda_2^2 = \dfrac{\sigma_{12}\sigma_{23}}{\sigma_{13}}$ e $\lambda_3^2 = \dfrac{\sigma_{13}\sigma_{23}}{\sigma_{12}}$
- $\psi_{11} = \sigma_{11} - \lambda_1^2$, $\psi_{22} = \sigma_{22} - \lambda_2^2$ e $\psi_{33} = \sigma_{33} - \lambda_3^2$

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

Exemplo 2:

Suponha $p = 3$, $k = 1$ e seja

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \psi_{11} & \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2 & \lambda_2^2 + \psi_{22} & \lambda_2\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_3 & \lambda_2\lambda_3 & \lambda_3^2 + \psi_{33} \end{pmatrix}$$

Então,

- $\lambda_1^2 = \dfrac{\sigma_{12}\sigma_{13}}{\sigma_{23}}$, $\lambda_2^2 = \dfrac{\sigma_{12}\sigma_{23}}{\sigma_{13}}$ e $\lambda_3^2 = \dfrac{\sigma_{13}\sigma_{23}}{\sigma_{12}}$
- $\psi_{11} = \sigma_{11} - \lambda_1^2$, $\psi_{22} = \sigma_{22} - \lambda_2^2$ e $\psi_{33} = \sigma_{33} - \lambda_3^2$

$$d = \frac{1}{2}(p-k)^2 - \frac{1}{2}(p+k) = 0$$

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

No caso anteior, utilizemos

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0.7 \\ 0.9 & 1 & 0.4 \\ 0.7 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

No caso anteior, utilizemos

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0.7 \\ 0.9 & 1 & 0.4 \\ 0.7 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

Então a solução

- $\lambda_1^2 = \dfrac{\sigma_{12}\sigma_{13}}{\sigma_{23}}$, $\lambda_2^2 = \dfrac{\sigma_{12}\sigma_{23}}{\sigma_{13}}$ e $\lambda_3^2 = \dfrac{\sigma_{13}\sigma_{23}}{\sigma_{12}}$
- $\psi_{11} = \sigma_{11} - \lambda_1^2$, $\psi_{22} = \sigma_{22} - \lambda_2^2$ e $\psi_{33} = \sigma_{33} - \lambda_3^2$

nos levará a: $\psi_{11} = 1 - \dfrac{0.9 \times 0.7}{0.4} = -0.575$

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

No caso anteior, utilizemos

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0.7 \\ 0.9 & 1 & 0.4 \\ 0.7 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

Então a solução

- $\lambda_1^2 = \dfrac{\sigma_{12}\sigma_{13}}{\sigma_{23}}$, $\lambda_2^2 = \dfrac{\sigma_{12}\sigma_{23}}{\sigma_{13}}$ e $\lambda_3^2 = \dfrac{\sigma_{13}\sigma_{23}}{\sigma_{12}}$
- $\psi_{11} = \sigma_{11} - \lambda_1^2$, $\psi_{22} = \sigma_{22} - \lambda_2^2$ e $\psi_{33} = \sigma_{33} - \lambda_3^2$

nos levará a: $\psi_{11} = 1 - \dfrac{0.9 \times 0.7}{0.4} = -0.575$

Variância negativa?

Modelo Factorial: Não unicidade das cargas fatoriais

No caso anteior, utilizemos

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0.7 \\ 0.9 & 1 & 0.4 \\ 0.7 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

Então a solução

- $\lambda_1^2 = \dfrac{\sigma_{12}\sigma_{13}}{\sigma_{23}}$, $\lambda_2^2 = \dfrac{\sigma_{12}\sigma_{23}}{\sigma_{13}}$ e $\lambda_3^2 = \dfrac{\sigma_{13}\sigma_{23}}{\sigma_{12}}$
- $\psi_{11} = \sigma_{11} - \lambda_1^2$, $\psi_{22} = \sigma_{22} - \lambda_2^2$ e $\psi_{33} = \sigma_{33} - \lambda_3^2$

nos levará a: $\psi_{11} = 1 - \dfrac{0.9 \times 0.7}{0.4} = -0.575$

Variância negativa? Cuidado! mesmo quando $d = 0$, a solução única pode apresentar inconsistências estatísticas.

Estimação

Estimação

Na práticas temos uma matriz de dados

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

cuja informação pode ser sumarizada por $\bar{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{S}$.

Estimação

Na práticas temos uma matriz de dados

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

cuja informação pode ser sumarizada por $\bar{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{S}$.

O problema de interesse é estimar Λ e $\mathbf{\Psi}$ $(\Sigma = \Lambda\Lambda' + \mathbf{\Psi})$ a partir de $\mathbf{S}$.

Estimação

Na práticas temos uma matriz de dados

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

cuja informação pode ser sumarizada por $\bar{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{S}$.

O problema de interesse é estimar Λ e $\mathbf{\Psi}$ ($\Sigma = \Lambda\Lambda' + \mathbf{\Psi}$) a partir de $\mathbf{S}$.

Ou seja, queremos $\hat{\Lambda}$ e $\hat{\mathbf{\Psi}}$ tais que $\mathbf{S} = \hat{\Lambda}\hat{\Lambda}' + \hat{\mathbf{\Psi}}$ (pelo menos aproximadamente).

Estimação

Na práticas temos uma matriz de dados

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

cuja informação pode ser sumarizada por $\bar{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{S}$.

O problema de interesse é estimar Λ e $\mathbf{\Psi}$ ($\Sigma = \Lambda\Lambda' + \mathbf{\Psi}$) a partir de $\mathbf{S}$.

Ou seja, queremos $\hat{\Lambda}$ e $\hat{\mathbf{\Psi}}$ tais que $\mathbf{S} = \hat{\Lambda}\hat{\Lambda}' + \hat{\mathbf{\Psi}}$ (pelo menos aproximadamente).

Dado $\hat{\Lambda}$, é natural fazermos $\hat{\psi}_{ii} = s_i^2 - \sum_{j=1}^{k} \hat{\lambda}_{ij}^2 = s_i^2 - \hat{h}_i^2$

Referências

Na próxima aula veremos alguns métodos de estimação.

Referências

- Härdle, W. K., & Simar, L. (2019). Applied Multivariate Statistical Analysis. Fifth Editon. Springer Nature. Capítulo 12.
- Mardia, K. V., Kent, J. T., & Bibby, J, M. (1979). Multivariate Analysis. Academic Press. Capítulo 9.
- Peña, D. (2002). Análisis de Datos Multivariantes. Mc Graw Hill. Capítulo 12.