ME731 - Métodos em Análise Multivariada – Inferência para o vetor de médias e matriz de covariância–

Prof. Carlos Trucíos
ctrucios@unicamp.br
ctruciosm.github.io

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica,
Universidade Estadual de Campinas

Aula 07

Agenda I

Teste da Razão de Verossimilhança (TRV)

Teste da Razão de Verossimilhança (TRV)

Notação

- Uma sequência $X_1, \cdots, X_n$ de n variáveis aleatórias *iid* com densidade $f(x|\theta)$, é dita ser uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição de $X \sim f(x|\theta)$.
- O mesmo aplica para $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^p$ (uma a.a de tamanho n da distribuição de $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$).

Teste da Razão de Verossimilhança (TRV)

TRV

Seja $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^p$ uma a.a de tamanho n de $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ e sejam as hipóteses

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_0 \quad vs. \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_1.$$

O TRV para testar H_0 vs H_1 pode ser definido como o teste com região de rejeição (R.R) dada por

$$R = \{\mathbf{x} : \Lambda(\mathbf{x}) = \frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})} < c\},$$

em que c é determinado de forma que $\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0} P_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X} \in R) = \alpha$

Teste da Razão de Verossimilhança (TRV)

Equivalentemente, podemos definir a estatística

$$-2\log\left(\Lambda(\mathbf{X})\right) = 2\left[\underbrace{\log\left(\sup_{\theta\in\Omega} L(\theta|\mathbf{X})\right)}_{\sup_{\theta\in\Omega} l(\theta|\mathbf{X})} - \underbrace{\log\left(\sup_{\theta\in\Omega_0} L(\theta|\mathbf{X})\right)}_{\sup_{\theta\in\Omega_0} l(\theta|\mathbf{X})}\right],$$

com R.R dada por $R = \{\mathbf{x} : -2\log(\Lambda(\mathbf{x})) > c*\}$

Teste da Razão de Verossimilhança (TRV)

Equivalentemente, podemos definir a estatística

$$-2\log\left(\Lambda(\mathbf{X})\right) = 2\left[\underbrace{\log\left(\sup_{\theta\in\Omega} L(\theta|\mathbf{X})\right)}_{\sup_{\theta\in\Omega} l(\theta|\mathbf{X})} - \underbrace{\log\left(\sup_{\theta\in\Omega_0} L(\theta|\mathbf{X})\right)}_{\sup_{\theta\in\Omega_0} l(\theta|\mathbf{X})}\right],$$

com R.R dada por $R = \{\mathbf{x} : -2\log(\Lambda(\mathbf{x})) > c*\}$

Note que para calcular c (ou $c*$) precisamos conhecer a distribuição de Λ quando H_0 é verdadeiro, mas isto não sempre é facil. Felizmente, quando $n \to \infty$ podemos obter uma distribuição aproximada.

Teste da Razão de Verossimilhança (TRV)

Teorema de Wilks

Seja $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^p$ uma a.a de tamanho n de $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ e sejam as hipóteses

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_0 \quad vs. \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_1.$$

Então, quando $n \to \infty$,

$$-2\log(\Lambda(\mathbf{X})) \sim \chi^2_{q-r},$$

em que q é a dimensão de $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_0$ e r é a dimensão de Ω_0.

Teste da Razão de Verossimilhança (TRV)

Teorema de Wilks

Seja $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^p$ uma a.a de tamanho n de $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ e sejam as hipóteses

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_0 \quad vs. \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_1.$$

Então, quando $n \to \infty$,

$$-2\log(\Lambda(\mathbf{X})) \sim \chi^2_{q-r},$$

em que q é a dimensão de $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_0$ e r é a dimensão de Ω_0.

A partir do TRV definiremos alguns testes para o vetor de médias.

Teste para o vetor de médias com Σ conhecido

Teste para o vetor de médias com Σ conhecido

Sejam $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n$ a.a de $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ com Σ conhecido. Queremos testar

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

.

Teste para o vetor de médias com Σ conhecido

Sejam $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n$ a.a de $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ com Σ conhecido. Queremos testar

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

.

- $\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0} l(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \mu_0.$
- $\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega} l(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \bar{\mathbf{X}}.$

Teste para o vetor de médias com Σ conhecido

Sejam $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n$ a.a de $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ com Σ conhecido. Queremos testar

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

.

- $\sup\limits_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0} l(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \mu_0.$
- $\sup\limits_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega} l(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \bar{\mathbf{X}}.$
- $\sup\limits_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0} l(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) = l(\mu_0) =$ $-\frac{n}{2}\log(|2\pi\Sigma|) - \frac{n}{2}Tr(\Sigma^{-1}S) - \frac{n}{2}(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)'\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)$
- $\sup\limits_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega} l(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) = l(\bar{\mathbf{X}}) = -\frac{n}{2}\log(|2\pi\Sigma|) - \frac{n}{2}Tr(\Sigma^{-1}S)$

Teste para o vetor de médias com Σ conhecido

Então,

$$-2\log(\Lambda(\mathbf{X})) = 2[l(\bar{\mathbf{X}}|\mathbf{X}, \Sigma) - l(\boldsymbol{\mu_0}|\mathbf{X}, \Sigma)] = n(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)'\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0).$$

Teste para o vetor de médias com Σ conhecido

Então,

$$-2\log(\Lambda(\mathbf{X})) = 2[l(\bar{\mathbf{X}}|\mathbf{X},\Sigma) - l(\boldsymbol{\mu_0}|\mathbf{X},\Sigma)] = n(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)'\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0).$$

Sob H_0, sabemos que

$$-2\log(\Lambda(\mathbf{X})) = n(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)'\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0) \sim \chi^2_p.$$

Assim, rejeitamos H_0 se $R = \{\mathbf{x} : -2\log(\Lambda(\mathbf{x})) > \chi^2_{1-\alpha,p}\}$

Teste para o vetor de médias com Σ conhecido: Exemplo

O dataset `frets` contém informação a respeito do cumprimento (breadth) e da largura (length) das cabeças do primeiro e segundo filho de 25 familias.

```
library(boot)
library(dplyr)
data(frets)
glimpse(frets)
```

```
## Rows: 25
## Columns: 4
## $ l1 <dbl> 191, 195, 181, 183, 176, 208, 189, 197, 188, 192, 1
## $ b1 <dbl> 155, 149, 148, 153, 144, 157, 150, 159, 152, 150, 1
## $ l2 <dbl> 179, 201, 185, 188, 171, 192, 190, 189, 197, 187, 1
## $ b2 <dbl> 145, 152, 149, 149, 142, 152, 149, 152, 159, 151, 1
```

Teste para o vetor de médias com Σ conhecido: Exemplo

Com fins meramente ilustrativos, vamos assumir que as variáveis `l1` e `l3` tem uma distribuição $N_2\left(\mu, \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}\right)$ e queremos testar $H_0 : \mu = (182, 182)'$.

Teste para o vetor de médias com Σ conhecido: Exemplo

Com fins meramente ilustrativos, vamos assumir que as variáveis l1 e l3 tem uma distribuição $N_2\left(\mu, \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}\right)$ e queremos testar $H_0 : \mu = (182, 182)'$.

$$-2\log(\Lambda(\mathbf{X})) = n(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)'\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)$$

```
frets_ss <- frets %>% select(l1,l2)
x_barra <- matrix(apply(frets_ss, 2, mean), ncol = 1)
mu0 <- matrix(c(182, 182), ncol = 1)
Sigma <- matrix(c(100, 0 , 0, 100), ncol = 2)
n <- nrow(frets_ss)
p <- ncol(frets_ss)
```

Teste para o vetor de médias com Σ conhecido: Exemplo

```
trv <- n * t(x_barra - mu0) %*% solve(Sigma) %*% (x_barra - mu0)
trv
```

```
##         [,1]
## [1,] 4.306
```

```
alpha = 0.05
ifelse(trv > qchisq(1 - alpha, p),
       "Rejeito H0",
       "Não rejeito H0")
```

```
##       [,1]
## [1,] "Não rejeito H0"
```

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido

Sejam $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n$ a.a de $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ com Σ desconhecido. Queremos testar

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

.

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido

Sejam $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n$ a.a de $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ com Σ desconhecido. Queremos testar

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

.

- $\sup_{\theta \in \Omega_0} l(\theta|\mathbf{X}) \to \hat{\mu} = \mu_0 \quad e \quad \hat{\Sigma} = S + \underbrace{(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)}_{\mathbf{d}} \underbrace{(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)'}_{\mathbf{d}'}$
- $\sup_{\theta \in \Omega} l(\theta|\mathbf{X}) \to \hat{\mu} = \bar{\mathbf{X}} \quad e \quad \hat{\Sigma} = S$

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido

Sejam $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n$ a.a de $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ com Σ desconhecido. Queremos testar

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

.

- $\sup\limits_{\theta \in \Omega_0} l(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \mu_0 \quad e \quad \hat{\Sigma} = S + \underbrace{(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)}_{\mathbf{d}} \underbrace{(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)'}_{\mathbf{d}'}$
- $\sup\limits_{\theta \in \Omega} l(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \bar{\mathbf{X}} \quad e \quad \hat{\Sigma} = S$
- $\sup\limits_{\theta \in \Omega_0} l(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) = l(\mu_0, S + \mathbf{d}\mathbf{d}') =$ $-\frac{n}{2}[p \log(2\pi) + \log(|S|) + \log(1 + \mathbf{d}' S^{-1} \mathbf{d}) + p]$
- $\sup\limits_{\theta \in \Omega} l(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) = l(\bar{\mathbf{X}}, S) = -\frac{n}{2}[p \log(2\pi) + \log(|S|) + p]$

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido

Assim,

$$-2\log(\Lambda(\mathbf{X})) = 2[l(\bar{\mathbf{X}}, S) - l(\mu_0, S + \mathbf{d}\mathbf{d}')] = n\log(1 + \mathbf{d}'S^{-1}\mathbf{d})$$

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido

Assim,

$$-2\log(\Lambda(\mathbf{X})) = 2[l(\bar{\mathbf{X}}, S) - l(\mu_0, S + \mathbf{d}\mathbf{d}')] = n\log(1 + \mathbf{d}'S^{-1}\mathbf{d})$$

e rejeitamos H_0 se

$$R = \{\mathbf{x} : n\log(1+\mathbf{d}'S^{-1}\mathbf{d}) > c\} \equiv \{\mathbf{x} : (n-1)\mathbf{d}'S^{-1}\mathbf{d} > c_1\} \equiv \{\mathbf{x} : \frac{n-p}{p}\mathbf{d}'S^{-1}\mathbf{d} > c_2\}$$

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido

Assim,

$$-2\log(\Lambda(\mathbf{X})) = 2[l(\bar{\mathbf{X}}, S) - l(\mu_0, S + \mathbf{dd}')] = n\log(1 + \mathbf{d}'S^{-1}\mathbf{d})$$

e rejeitamos H_0 se

$$R = \{\mathbf{x} : n\log(1+\mathbf{d}'S^{-1}\mathbf{d}) > c\} \equiv \{\mathbf{x} : (n-1)\mathbf{d}'S^{-1}\mathbf{d} > c_1\} \equiv \{\mathbf{x} : \frac{n-p}{p}\mathbf{d}'S^{-1}\mathbf{d} > c_2\}$$

Por outro lado, sabemos que sob H_0

$$(n-1)(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)S^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)' \sim T^2_{p,n-1} \quad e \quad \frac{n-p}{p}(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)S^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)' \sim F_{p,n-p}$$

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido

Assim, rejeitamos H_0 se

$$R = \{\mathbf{x} : (n-1)\mathbf{d}'S^{-1}\mathbf{d} > T^2_{1-\alpha,p,n-1}\},$$

ou, equivalentemente

$$R = \{\mathbf{x} : \frac{n-p}{p}\mathbf{d}'S^{-1}\mathbf{d} > F_{1-\alpha,p,n-p}\}$$

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido: Exemplo

Com fins meramente ilustrativos, vamos assumir que as variáveis `l1` e `l3` tem uma distribuição $N_2(\mu, \Sigma)$ e queremos testar $H_0 : \mu = (182, 182)'$

Teste para o vetor de médias com Σ desconhecido: Exemplo

Com fins meramente ilustrativos, vamos assumir que as variáveis `l1` e `l3` tem uma distribuição $N_2(\mu, \Sigma)$ e queremos testar $H_0 : \mu = (182, 182)'$

```
invS <- solve((n - 1)/n*cov(frets_ss))
est <- (n - p)/p*t(x_barra - mu0)%*%invS%*%(x_barra - mu0)
est
```

```
##          [,1]
## [1,] 1.925323
```

```
ifelse(est > qf(1 - alpha, p, n - p),
       "Rejeito H0", "Não rejeito H0")
```

```
##      [,1]
## [1,] "Não rejeito H0"
```

Teste conhecido como Hotelling one-sample T^2 test.

Teste para a matriz de covariância

Teste para a matriz de covariância

Seja $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n$ uma a.a. de $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ e queremos testar

$$H_0 : \Sigma = \Sigma_0 \quad vs. \quad H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0.$$

Teste para a matriz de covariância

Seja $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n$ uma a.a. de $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ e queremos testar

$$H_0 : \Sigma = \Sigma_0 \quad vs. \quad H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0.$$

- $\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0} l(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \bar{\mathbf{X}} \quad e \quad \hat{\Sigma} = \Sigma_0.$
- $\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega} l(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) \rightarrow \hat{\mu} = \bar{\mathbf{X}} \quad e \quad \hat{\Sigma} = S.$

Teste para a matriz de covariância

Seja $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n$ uma a.a. de $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ e queremos testar

$$H_0 : \Sigma = \Sigma_0 \quad vs. \quad H_1 : \Sigma \neq \Sigma_0.$$

- $\sup_{\theta \in \Omega_0} l(\theta|\mathbf{X}) \to \hat{\mu} = \bar{\mathbf{X}} \quad e \quad \hat{\Sigma} = \Sigma_0.$
- $\sup_{\theta \in \Omega} l(\theta|\mathbf{X}) \to \hat{\mu} = \bar{\mathbf{X}} \quad e \quad \hat{\Sigma} = S.$
- $\sup_{\theta \in \Omega_0} l(\theta|\mathbf{X}) = l(\bar{\mathbf{X}}, \Sigma_0) = -\frac{np}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(|\Sigma_0|) - \frac{n}{2} Tr(\Sigma_0^{-1} S)$
- $\sup_{\theta \in \Omega} l(\theta|\mathbf{X}) = l(\bar{\mathbf{X}}, S) = -\frac{np}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(|S|) - \frac{np}{2}$

Teste para a matriz de covariância

Assim,

$$-2\log(\Lambda(\mathbf{X})) = 2[l(\bar{\mathbf{X}}, S) - l(\bar{\mathbf{X}}, \Sigma_0)] = n\log\left(\frac{|\Sigma_0|}{|S|}\right) + nTr(\Sigma_0^{-1}S) - np.$$

Teste para a matriz de covariância

Assim,

$$-2\log(\Lambda(\mathbf{X})) = 2[l(\bar{\mathbf{X}}, S) - l(\bar{\mathbf{X}}, \Sigma_0)] = n\log\left(\frac{|\Sigma_0|}{|S|}\right) + nTr(\Sigma_0^{-1}S) - np.$$

Sob H_0,

$$-2\log(\Lambda(\mathbf{X})) \sim^{approx} \chi^2_{p(p+1)/2},$$

e rejeitamos H_0 se $R = \{\mathbf{x} : -2\log(\Lambda(\mathbf{x})) > \chi^2_{1-\alpha, p(p+1)/2}\}$

Note que se $\Sigma_0 = I$, a estatística de teste se reduz a

$$-2\log(\Lambda(\mathbf{x})) = -n\log(|S|) + nTr(S) - np.$$

Teste para a matriz de covariância

Um caso interessante é querer testar se as variáveis aleatórioas no vetor aleatório são não correlacionadas, ou independentes no caso da normal mulltivariada, queremos testar

$$H_0 : \Sigma = \text{diagonal} \quad vs. \quad \Sigma \neq \text{diagonal}$$

Teste para a matriz de covariância

Um caso interessante é querer testar se as variáveis aleatórioas no vetor aleatório são não correlacionadas, ou independentes no caso da normal mulltivariada, queremos testar

$$H_0 : \Sigma = \text{diagonal} \quad vs. \quad \Sigma \neq \text{diagonal}$$

Pode-se mostrar que,

$$-2\log(\Lambda(\mathbf{X})) = -n\log(|\text{diag}(S)|^{-1}|S|) \sim^{approx} \chi^2_{p(p+1)/2-p}.$$

Assim, rejeitamos H_0 se $R = \{\mathbf{x} : -2\log(\Lambda(\mathbf{x})) > \chi^2_{1-\alpha,p(p+1)/2-p}\}$

Teste para a matriz de covariância

Por último, outro teste de interesse é o chamado teste de esfericidade, em que estamos interessados em testar

$$H_0 : \Sigma = \sigma^2 I \quad vs. \quad \Sigma \neq \sigma^2 I$$

Teste para a matriz de covariância

Por último, outro teste de interesse é o chamado teste de esfericidade, em que estamos interessados em testar

$$H_0 : \Sigma = \sigma^2 I \quad vs. \quad \Sigma \neq \sigma^2 I$$

Pode-se mostrar que,

$$-2\log(\Lambda(\mathbf{X})) = np\log(\hat{\sigma}^2) - n\log(|S|) \sim^{approx} \chi^2_{p(p+1)/2-1},$$

com R.R dada por $R = \{\mathbf{x} : -2\log(\Lambda(\mathbf{x})) > \chi^2_{1-\alpha, p(p+1)/2-1}\}$.

Comentários Finais

Advertência

Os testes apresentados foram construidos sob a suposição que $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n$ são **independêntes**. Se isto não for verdade (por exemplo, em situações onde lidamos com séries temporais), os testes não tem mais validez e não devem ser utilizados.

Observação

- Note que a forma de $-2\log(\Lambda(\mathbf{X}))$ obtidas aqui foram todas obtidas sob o suposto de Normalidade. Contudo, o TRV não se limita à distribuição Normal e sob diversas suposição podem ser obtidas outras formas de $-2\log(\Lambda(\mathbf{X}))$.
- Repare que o resultado $-2\log(\Lambda(\mathbf{X})) \sim^{approx} \chi^2_{q-r}$ independe da suposição feita a respeito a distribuição multivariada.
- O TRV embora útil, precisa da distribuição multivariada (o que não sempre é facil).

Referências

Referências

- Härdle, W. K., & Simar, L. (2019). Applied Multivariate Statistical Analysis. Fifth Editon. Springer Nature. Capítulo 7.
- Johnson, R. A., & Wichern, D. W. (2007). Applied multivariate statistical analysis. Sixth Edition. Pearson Prentice Hall. Capítulo 5.
- Mardia, K. V., Kent, J. T., & Bibby, J, M. (1979). Multivariate Analysis. Academic Press. Capítulo 5.