ME731 - Métodos em Análise Multivariada
– Vetores Aleatórios –

Prof. Carlos Trucíos
ctrucios@unicamp.br
ctruciosm.github.io

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica,
Universidade Estadual de Campinas

Aula 02

Agenda I

Definições básicas

Definições básicas

Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_p)'$ um vetor aleatório p-dimensional, então a função de distribuição acumulada é dada por:

$$F(\mathbf{x}) = P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) = P(X_1 \leq x_1, \cdots, X_p \leq x_p).$$

Definições básicas

Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_p)'$ um vetor aleatório p-dimensional, então a função de distribuição acumulada é dada por:

$$F(\mathbf{x}) = P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) = P(X_1 \leq x_1, \cdots, X_p \leq x_p).$$

Focaremos apenas no caso em que $\mathbf{X}$ é (absolutamente) contínua. Então

- Função distribuição:

$$F(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}} f(\mathbf{u})d(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{x_p} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(u_1, \cdots, u_p)du_1 \cdots du_p.$$

- Função densidade:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^p F(\mathbf{x})}{\partial x_1 \cdots \partial x_p}$$

Definições básicas

Consideremos $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)'$ em que $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^k$ e $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{R}^{p-k}$.

- Distribuição marginal de $\mathbf{X}_1$:

$$F(\mathbf{x}_1) = P(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{x}_1) = P(X_1 \leq x_1, \cdots, X_k \leq, x_k, \infty, \cdots, \infty).$$

- Densidade marginal de $\mathbf{X}_1$:

$$f_1(\mathbf{x}_1) = \int_{\infty}^{-\infty} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_2$$

Observação: as marginais para $\mathbf{X}_2$ são definidas de forma semelhante.

Definições básicas

Consideremos $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)'$ em que $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^k$ e $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{R}^{p-k}$.

- Distribuição marginal de $\mathbf{X}_1$:

$$F(\mathbf{x}_1) = P(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{x}_1) = P(X_1 \leq x_1, \cdots, X_k \leq, x_k, \infty, \cdots, \infty).$$

- Densidade marginal de $\mathbf{X}_1$:

$$f_1(\mathbf{x}_1) = \int_{\infty}^{-\infty} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_2$$

Observação: as marginais para $\mathbf{X}_2$ são definidas de forma semelhante.

Cuidado: *Diferentes densidades podem ter as mesmas marginas.*

Definições básicas

Exemplo:

Sejam as densidades

- $f(x_1, x_2) = 1, \quad 0 < x_1, x_2 < 1,$
- $f(x_1, x_2) = 1 + (2x_1 - 1)(2x_2 - 1), \quad 0 < x_1, x_2 < 1,$

Definições básicas

Exemplo:

Sejam as densidades

- $f(x_1, x_2) = 1, \quad 0 < x_1, x_2 < 1,$
- $f(x_1, x_2) = 1 + (2x_1 - 1)(2x_2 - 1), \quad 0 < x_1, x_2 < 1,$

Para o primeiro caso: $f_1(x_1) = f_2(x_2) = 1.$

Definições básicas

Exemplo:

Sejam as densidades

- $f(x_1, x_2) = 1, \quad 0 < x_1, x_2 < 1,$
- $f(x_1, x_2) = 1 + (2x_1 - 1)(2x_2 - 1), \quad 0 < x_1, x_2 < 1,$

Para o primeiro caso: $f_1(x_1) = f_2(x_2) = 1.$

Para o segundo caso:

- $f_1(x_1) = \int_0^1 1 + (2x_1 - 1)(2x_2 - 1)dx_2 = 1 + (2x_1 - 1) \times 0 = 1$
- $f_2(x_2) = \int_0^1 1 + (2x_1 - 1)(2x_2 - 1)dx_1 = 1 + (2x_2 - 1) \times 0 = 1$

Marginais iguais mas densidades diferentes.

Definições básicas

- Densidade condicional de $\mathbf{X}_2$ dado $\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1$:

$$f(\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1) = \frac{f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{f_1(\mathbf{x}_1)}$$

- Independência: $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ são independentes sss

$$f(\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1) = f_2(\mathbf{x}_2),$$

ou, equivalentemente,

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}_1)f_2(\mathbf{x}_2).$$

Definições básicas

- Densidade condicional de $\mathbf{X}_2$ dado $\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1$:

$$f(\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1) = \frac{f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{f_1(\mathbf{x}_1)}$$

- Independência: $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ são independentes sss

$$f(\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1) = f_2(\mathbf{x}_2),$$

ou, equivalentemente,

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}_1)f_2(\mathbf{x}_2).$$

Momentos

Valor esperado

Seja $\mathbf{X}$ um vetor aleatório p-dimensional com densidade $f(x)$. Então,

$$\mathbb{E}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}X_1 \\ \vdots \\ \mathbb{E}X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int x_1 f_1(x_1) dx_1 \\ \vdots \\ \int x_p f_p(x_p) dx_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} = \mu.$$

Valor esperado

Seja $\mathbf{X}$ um vetor aleatório p-dimensional com densidade $f(x)$. Então,

$$\mathbb{E}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}X_1 \\ \vdots \\ \mathbb{E}X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int x_1 f_1(x_1)dx_1 \\ \vdots \\ \int x_p f_p(x_p)dx_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} = \mu.$$

Se $\mathbf{X}$ for uma matriz aleatória $q \times p$ (*i.e.* os elementos X_{ij} são variáveis aleatórias), então

$$\mathbb{E}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}X_{11} & \mathbb{E}X_{12} & \cdots & \mathbb{E}X_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}X_{q1} & \mathbb{E}X_{q2} & \cdots & \mathbb{E}X_{qp} \end{pmatrix}.$$

Valor esperado

Propriedades

Seja $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$ um vetor aleatório p-dimensional. Então:

- Sejam $A_{q\times p}$ e $b_{q\times 1}$ constantes, então $\mathbb{E}(A\mathbf{X} + b) = A\mathbb{E}(\mathbf{X}) + b$.
- Sejam $A_{q\times p}$ e $B_{1\times r}$, então $\mathbb{E}(A\mathbf{X}B) = A\mathbb{E}(\mathbf{X})B$.
- Se $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ são vetores aleatórios independentes da mesma dimensão, então $\mathbb{E}(\mathbf{X}\mathbf{Y}') = \mathbb{E}\mathbf{X}\mathbb{E}\mathbf{Y}'$
- Sejam $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ vetores aleatórios da mesma dimensão e sejam a e b constantes, então $\mathbb{E}(a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}) = a\mathbb{E}(\mathbf{X}) + b\mathbb{E}(\mathbf{Y})$. (o mesmo vale para A e B matrices com as dimensões apropriadas)

Desde que todas as esperanças existam.

Valor esperado

Demostração:

Valor esperado

Seja $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ (função escalar), então:

$$\mathbb{E}(g(\mathbf{X})) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Valor esperado

Seja $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ (função escalar), então:

$$\mathbb{E}(g(\mathbf{X})) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Seja $G(\mathbf{x}) = \{g_{ij}(\mathbf{x})\} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{k\times l}$ (função matricial), então:

$$\mathbb{E}(G(\mathbf{X})) = \{\mathbb{E}[g_{ij}(\mathbf{x})]\}.$$

Matriz de covariância

Seja $\mathbf{X}$ um vetor aleatório p-dimensional com densidade $f(x)$. Então, a matriz de covariância é dada por

$$\mathbb{V}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mu)(\mathbf{X} - \mu)'] = \Sigma = \{\sigma_{ij}\},$$

Matriz de covariância

Seja $\mathbf{X}$ um vetor aleatório p-dimensional com densidade $f(x)$. Então, a matriz de covariância é dada por

$$\mathbb{V}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mu)(\mathbf{X} - \mu)'] = \Sigma = \{\sigma_{ij}\},$$

De forma mais geral, sejam $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$ e $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^q$ dois vetores aleatórios,

$$\mathbb{C}ov(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mu_X)(\mathbf{y} - \mu_Y)'] = \Sigma_{XY}$$

Matriz de covariância

Seja $\mathbf{X}$ um vetor aleatório p-dimensional com densidade $f(x)$. Então, a matriz de covariância é dada por

$$\mathbb{V}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mu)(\mathbf{X} - \mu)'] = \Sigma = \{\sigma_{ij}\},$$

De forma mais geral, sejam $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$ e $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^q$ dois vetores aleatórios,

$$\mathbb{C}ov(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mu_X)(\mathbf{y} - \mu_Y)'] = \Sigma_{XY}$$

A matriz de correlação é definida como

$$R = D^{-1/2}\Sigma D^{-1/2},$$

em que $D = diag(\Sigma)$.

Matriz de covariância

Propriedades

- $\sigma_{ij} = \mathbb{C}ov(X_i, X_j)$ e $\sigma_{ii} = \mathbb{V}(X_i) = \sigma_i^2$.
- $\Sigma = \mathbb{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}') - \mu\mu'$
- Seja a um vetor de constantes $(1 \times p)$, $\mathbb{V}(a\mathbf{X}) = a\Sigma a'$.
- $\Sigma \geq 0$.
- Sejam $A_{q\times p}$ e $b_{1\times p}$ matrices não aleatórias, então $\mathbb{V}(A\mathbf{X} + b) = A\Sigma A'$
- $\mathbb{C}ov(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathbb{V}(\mathbf{X})$.
- $\Sigma_{XY} = \Sigma'_{YX}$.
- $\mathbb{C}ov(\mathbf{X} + \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \mathbb{C}ov(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) + \mathbb{C}ov(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$.
- Se $p = q$, $\mathbb{V}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathbb{V}(\mathbf{X}) + \mathbb{C}ov(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \mathbb{C}ov(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) + \mathbb{V}(\mathbf{Y})$.
- Sejam A e B matrices com dimensão apropriada, então $\mathbb{C}ov(A\mathbf{X}, B\mathbf{Y}) = A\mathbb{C}ov(\mathbf{X}, \mathbf{Y})B'$.
- Se $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ são independentes, então $\mathbb{C}ov(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$

Matriz de covariância

Demostração:

Momentos condicionais

Seja o vetor aleatório p-dimensional $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)'$, com $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^k$ e $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{R}^{p-k}$. Então,

- $\mathbb{E}(\mathbf{X}_2|\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_{k+1}|\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_p|\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1) \end{pmatrix}.$
- $\mathbb{V}(\mathbf{X}_2|\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1) = \mathbb{E}(\mathbf{X}_2\mathbf{X}_2'|\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1) - \mathbb{E}(\mathbf{X}_2|\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1)\mathbb{E}(\mathbf{X}_2'|\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1)$

Momentos condicionais

Seja o vetor aleatório p-dimensional $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)'$, com $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^k$ e $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{R}^{p-k}$. Então,

- $\mathbb{E}(\mathbf{X}_2|\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_{k+1}|\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_p|\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1) \end{pmatrix}.$
- $\mathbb{V}(\mathbf{X}_2|\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1) = \mathbb{E}(\mathbf{X}_2\mathbf{X}_2'|\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1) - \mathbb{E}(\mathbf{X}_2|\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1)\mathbb{E}(\mathbf{X}_2'|\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1)$

Propriedades

- $\mathbb{E}(\mathbf{X}_2) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\mathbf{X}_2|\mathbf{X}_1)]$.
- $\mathbb{V}(\mathbf{X}_2) = \mathbb{E}[\mathbb{V}(\mathbf{X}_2|\mathbf{X}_1)] + \mathbb{V}[\mathbb{E}(\mathbf{X}_2|\mathbf{X}_1)]$

Momentos

Exemplo: Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_2)'$ com densidade

$$f(\mathbf{x}) = 2x_2(x_1 + x_3), \quad 0 < x_1, x_2, x_3 < 1.$$

Calcular $\mathbb{E}(\mathbf{X})$, $\mathbb{V}(\mathbf{X})$, $\mathbb{E}((X_1, X_2)'|X_2 = x_3)$ e $\mathbb{V}(X_1, X_2)'|X_2 = x_3)$.

Momentos

Exemplo: Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_2)'$ com densidade

$$f(\mathbf{x}) = 2x_2(x_1 + x_3), \quad 0 < x_1, x_2, x_3 < 1.$$

Calcular $\mathbb{E}(\mathbf{X})$, $\mathbb{V}(\mathbf{X})$, $\mathbb{E}((X_1, X_2)'|X_2 = x_3)$ e $\mathbb{V}(X_1, X_2)'|X_2 = x_3)$.

Solução

1. Calcular as marginais.
   - $f(x_1, x_3) = x_1 + x_3, \quad 0 < x_1, x_3, < 1$ e $f(x_2) = 2x_2, \quad 0 < x_2 < 1.$
   - $f(x_1) = x_1 + 1/2, \quad 0 < x_1 < 1.$
   - $f(x_3) = x_3 + 1/2, \quad 0 < x_3 < 1.$

Momentos

$$\mathbb{E}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}X_1 \\ \mathbb{E}X_2 \\ \mathbb{E}X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 x_1(x_1 + 1/2)dx_1 \\ \int_0^1 x_2(2x_2)dx_2 \\ \int_0^1 x_3(x_3 + 1/2)dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/12 \\ 2/3 \\ 7/12 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbb{V}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X_1) & 0 & \mathbb{C}ov(X_1, X_3) \\ 0 & \mathbb{V}(X_2) & 0 \\ \mathbb{C}ov(X_1, X_3) & 0 & \mathbb{V}(X_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{144} & 0 & \frac{-1}{144} \\ 0 & \frac{1}{18} & 0 \\ \frac{-1}{144} & 0 & \frac{11}{144} \end{pmatrix}.$$

Momentos

Ainda precisamos calcular $\mathbb{E}((X_1, X_2)'|X_2 = x_3)$ e $\mathbb{V}(X_1, X_2)'|X_2 = x_3)$.

2. Calcular as distribuições condicionais.

- $f(x_1, x_2|x_3) = \dfrac{f(x_1, x_2, x_3)}{f(x_3)} = \dfrac{4x_2(x_1 + x_3)}{2x_3 + 1}, \quad 0 < x_1, x_2 < 1.$
- $f(x_1|x_3) = \dfrac{f(x_1, x_3)}{f(x_3)} = \dfrac{2(x_1 + x_3)}{2x_3 + 1}, \quad 0 < x_1 < 1.$
- $f(x_2|x_3) = f(x_2) = 2x_2, \quad 0 < x_2 < 1.$

Momentos

Ainda precisamos calcular $\mathbb{E}((X_1, X_2)'|X_2 = x_3)$ e $\mathbb{V}(X_1, X_2)'|X_2 = x_3)$.

2. Calcular as distribuições condicionais.
   - $f(x_1, x_2|x_3) = \dfrac{f(x_1, x_2, x_3)}{f(x_3)} = \dfrac{4x_2(x_1 + x_3)}{2x_3 + 1}, \quad 0 < x_1, x_2 < 1.$
   - $f(x_1|x_3) = \dfrac{f(x_1, x_3)}{f(x_3)} = \dfrac{2(x_1 + x_3)}{2x_3 + 1}, \quad 0 < x_1 < 1.$
   - $f(x_2|x_3) = f(x_2) = 2x_2, \quad 0 < x_2 < 1.$

$$\mathbb{E}\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} |X_3 = x_3\right) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1|X_3 = x_3) \\ \mathbb{E}(X_2|X_3 = x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{2 + 3x_3}{2x_3 + 1}\right) \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Momentos

$$\mathbb{V}\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} | X_3 = x_3\right) = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X_1|X_3 = x_3) & \mathbb{C}ov(X_1, X_2|X_3 = x_3) \\ \mathbb{C}ov(X_1, X_2|X_3 = x_3) & \mathbb{V}(X_2|X_3 = x_3) \end{pmatrix}$$

Momentos

$$\mathbb{V}\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} | X_3 = x_3\right) = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X_1|X_3 = x_3) & \mathbb{C}ov(X_1, X_2|X_3 = x_3) \\ \mathbb{C}ov(X_1, X_2|X_3 = x_3) & \mathbb{V}(X_2|X_3 = x_3) \end{pmatrix}$$

Como X_2 e (X_1, X_3) são independentes

$$= \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X_1|X_3 = x_3) & 0 \\ 0 & \mathbb{V}(X_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{18}\left(\frac{6x_3^2 + 6x_3 + 1}{(2x_3^2 + 1)^2}\right) & 0 \\ 0 & 1/18 \end{pmatrix}$$

Outros momentos

- O k-éssimo momento central para as variáveis $X_{i_1}, \cdots, X_{i_s}$ é dado por

$$\mu_{i_1,\cdots,i_s}^{j_1,\cdots,j_s} = \mathbb{E}\Big\{\Pi_{t=1}^{s}(X_{i_t} - \mu_{i_t})^{j_t}\Big\},$$

em que $j_t \neq 0, \quad \forall t$ e $j_1 + \cdots + j_s = k$.

- Sejam $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ iid. Então uma medida multivariada de assimetria é a seguinte:

$$\beta_{1,p} = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{Y} - \mu)]^3$$

- Uma medida multivariada de curtose é a seguinte:

$$\beta_{2,p} = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{X} - \mu)]^2$$

Outros momentos

- O k-éssimo momento central para as variáveis $X_{i_1}, \cdots, X_{i_s}$ é dado por

$$\mu_{i_1,\cdots,i_s}^{j_1,\cdots,j_s} = \mathbb{E}\left\{\Pi_{t=1}^{s}(X_{i_t} - \mu_{i_t})^{j_t}\right\},$$

em que $j_t \neq 0, \quad \forall t$ e $j_1 + \cdots + j_s = k$.
- Sejam $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ iid. Então uma medida multivariada de assimetria é a seguinte:

$$\beta_{1,p} = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{Y} - \mu)]^3$$

- Uma medida multivariada de curtose é a seguinte:

$$\beta_{2,p} = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{X} - \mu)]^2$$

Existem diversas medidas multivariadas de assimetria e kurtose. As aqui definidas são as propostas por Mardia (1970).

Função característica

Função característica

Definição

Seja $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$ um vetor aleatório p-dimensional com densidade $f(\mathbf{x})$. A função caracteristica de $\mathbf{X}$ é uma função $\varphi_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$ definida como

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}(e^{i\mathbf{t}'\mathbf{X}}) = \int e^{i\mathbf{t}'\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^p$$

Função característica

Definição

Seja $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^p$ um vetor aleatório p-dimensional com densidade $f(\mathbf{x})$. A função caracteristica de $\mathbf{X}$ é uma função $\varphi_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$ definida como

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}(e^{i\mathbf{t}'\mathbf{X}}) = \int e^{i\mathbf{t}'\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^p$$

Propriedades:

- $\varphi_{\mathbf{X}}(0) = 1$
- $|\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})| \leq 1.$
- Dois vetores aleatórios tem a mesma função caractertística sss tem a mesma distribuição.

Função característica

Propriedades:

- Seja $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)'$ com $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^q$ e $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{R}^{p-q}$. Os vetores aleatórios $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ são independentes sss
$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \varphi_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{t}_1)\varphi_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{t}_2),$$
em que $\mathbf{t} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)'$.
- Se $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ são vetores aleatórios p-dimensionais independentes, então
$$\varphi_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}(t) = \varphi_{\mathbf{X}}(t)\varphi_{\mathbf{y}}(t)$$
- A função caracteristica das marginais X_i são
$$\varphi_{X_1}(t_1) = \varphi_{\mathbf{X}}(t_1, 0, \cdots, 0), \cdots, \varphi_{X_p}(t_p) = \varphi_{\mathbf{X}}(0, 0, \cdots, t_p)$$
.
- $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \frac{1}{i}\frac{\partial \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}}\Big|_{\mathbf{t}=0}$ e $\mathbb{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}') = -\frac{\partial^2 \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}\partial \mathbf{t}'}\Big|_{\mathbf{t}=0}$

Função característica

Propriedades:

- $\forall j_k \geq 0, k = 1, \cdots, p$ e $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_p)'$, temos que

$$\mathbb{E}(X_1^{j_1} \times \cdots \times X_p^{j_p}) = \frac{1}{i^{j_1+\cdots+j_p}} \left[\frac{\partial^{j_1+\cdots j_p} \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1^{j_1} \cdots \partial t_p^{j_p}} \right]_{t=0}$$

- Se $\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ for absolutamente integrável (ou seja, se $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})| d\mathbf{t} < \infty$), então $\mathbf{X}$ tem densidade

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{t}'\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$$

.

Função característica

Propriedades:

- $\forall j_k \geq 0, k = 1, \cdots, p$ e $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_p)'$, temos que

$$\mathbb{E}(X_1^{j_1} \times \cdots \times X_p^{j_p}) = \frac{1}{i^{j_1 + \cdots + j_p}} \left[\frac{\partial^{j_1 + \cdots j_p} \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1^{j_1} \cdots \partial t_p^{j_p}} \right]_{t=0}$$

- Se $\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ for absolutamente integrável (ou seja, se $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})| d\mathbf{t} < \infty$), então $\mathbf{X}$ tem densidade

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{t}'\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$$

.

Esta última propriedade é conhecida como ***fórmula da inversão****.*

Função característica

Definição

A função caracteristica de uma matriz aleatória $\mathbf{X}$ é dada por

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{T}) = \mathbb{E}(e^{iTr(\mathbf{T}'\mathbf{X})}),$$

em que $\mathbf{T}$ e $\mathbf{X}$ são da mesma dimensão.

Derivadas matriciais

Derivadas matriciais

Definição

Seja $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_p)'$,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}'} = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right]'.$$

A derivada de segunda ordem é dada por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}'} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right).$$

Derivadas matriciais

Definição

Sejam $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_p)'$ e $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_p)'$,

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}'} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_p}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

Derivadas matriciais

Propriedades:

- $\dfrac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} = \dfrac{\partial \mathbf{a}'\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = a$
- $\dfrac{\partial \mathbf{x}' A \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = (A + A')\mathbf{x}$
- $\dfrac{\partial A \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} = A$
- $\dfrac{\partial A \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = A'$
- $\dfrac{\partial^2 \mathbf{x}' A \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}'} = A' + A$
- $\dfrac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{x}$

Derivadas matriciais

Definição

Sejam $f(\mathbf{X}) : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ com $\mathbf{X}_{m\times n}$,

$$\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_{ij}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_{m1}} & \cdots & \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_{mn}} \end{pmatrix}$$

Transformações

Transformações

Seja $\mathbf{X}$ um vetor aleatório p-dimensional com densidade $f(\mathbf{x})$.

- Qual é a densidade de $\mathbf{Y} = 3\mathbf{X}$?
- Qual é a densidade de $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 3X_1 \\ X_1 - 4X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$?

Transformações

Seja $\mathbf{X}$ um vetor aleatório p-dimensional com densidade $f(\mathbf{x})$.

- Qual é a densidade de $\mathbf{Y} = 3\mathbf{X}$?
- Qual é a densidade de $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 3X_1 \\ X_1 - 4X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$?

Em geral, seja $\mathbf{X} = u(\mathbf{Y})$ com $u : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ uma função bijectiva (um a um). A densidade de $\mathbf{Y}$ é dada por

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = |\mathbf{J}| f_{\mathbf{X}}(u(\mathbf{y})),$$

em que $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}'}\right| = \left|\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial y_p} \end{vmatrix}.$

Transformações

Exemplos:

Se $\mathbf{Y} = 3\mathbf{X}$, qual a densidade de $\mathbf{Y}$?

Transformações

Exemplos:

Se $\mathbf{Y} = 3\mathbf{X}$, qual a densidade de $\mathbf{Y}$?

Solução: Sabemos que $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = |\mathbf{J}| f_{\mathbf{X}}(u(\mathbf{y}))$.

- $\mathbf{y} = 3\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} = \underbrace{\frac{1}{3}\mathbf{y}}_{u(\mathbf{y})}$
- $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = \left|\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right| = \begin{vmatrix} 1/3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3^p}$

Transformações

Exemplos:

Se $\mathbf{Y} = 3\mathbf{X}$, qual a densidade de $\mathbf{Y}$?

Solução: Sabemos que $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = |\mathbf{J}| f_{\mathbf{X}}(u(\mathbf{y}))$.

- $\mathbf{y} = 3\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} = \underbrace{\frac{1}{3}\mathbf{y}}_{u(\mathbf{y})}$
- $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = \left|\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right| = \begin{vmatrix} 1/3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3^p}$

$$\text{Logo,} \quad f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{3^p} f_{\mathbf{X}}\left(\frac{1}{3}\mathbf{y}\right)$$

Transformações

Exemplos:

Se $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + b$, qual a densidade de $\mathbf{Y}$?

Solução: Sabemos que $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = |\mathbf{J}| f_{\mathbf{X}}(u(\mathbf{y}))$.

- $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + b \to \mathbf{x} = \underbrace{A^{-1}(\mathbf{y} - b)}_{u(\mathbf{y})}$.
- $\mathbf{J} = \left| \dfrac{\partial A^{-1}\mathbf{y} - A^{-1}b}{\partial \mathbf{y}'} \right| = \left| A^{-1} \right| = |A|^{-1}$

Transformações

Exemplos:

Se $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + b$, qual a densidade de $\mathbf{Y}$?

Solução: Sabemos que $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = |\mathbf{J}| f_{\mathbf{X}}(u(\mathbf{y}))$.

- $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + b \rightarrow \mathbf{x} = \underbrace{A^{-1}(\mathbf{y} - b)}_{u(\mathbf{y})}$.
- $\mathbf{J} = \left| \dfrac{\partial A^{-1}\mathbf{y} - A^{-1}b}{\partial \mathbf{y}'} \right| = \left| A^{-1} \right| = |A|^{-1}$

$$\text{Logo,} \quad f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = ||A|^{-1}| f_{\mathbf{X}}(A^{-1}(\mathbf{y} - b))$$

Referências

Referências

- Härdle, W. K., & Simar, L. (2019). Applied Multivariate Statistical Analysis. Fifth Editon. Springer Nature. Capítulo 4
- Johnson, R. A., & Wichern, D. W. (2007). Applied multivariate statistical analysis. Sixth Edition. Pearson Prentice Hall. Capítulo 2
- Mardia, K. V., Kent, J. T., & Bibby, J, M. (1979). Multivariate Analysis. Academic Press. Capítulo 2
- Seber, G. A. (2008). A Matrix Handbook for Statisticians. John Wiley & Sons. Seções 17.3 e 17.4