MAD211 - Estatística para Administração

Teste de Hipóteses III

Prof. Carlos Trucíos
carlos.trucios@facc.ufrj.br
ctruciosm.github.io

Faculdade de Administração e Ciências Contábeis,
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Aula 19

Comparação de variâncias

Análise de variância

Comparação de variâncias

Comparação de variâncias

- Quando fizemos inferência para a diferença de médias $(\mu_x - \mu_y)$ com variâncias desconhecidas vimos que tinhamos 2 procedimentos diferentes:

Comparação de variâncias

- Quando fizemos inferência para a diferença de médias $(\mu_x - \mu_y)$ com variâncias desconhecidas vimos que tinhamos 2 procedimentos diferentes:
  - Quando as variâncias são desconhecidas e iguais

Comparação de variâncias

- Quando fizemos inferência para a diferença de médias $(\mu_x - \mu_y)$ com variâncias desconhecidas vimos que tinhamos 2 procedimentos diferentes:
  - Quando as variâncias são desconhecidas e iguais
  - Quando as variâncias são desconhecidas e diferentes

Comparação de variâncias

- Quando fizemos inferência para a diferença de médias $(\mu_x - \mu_y)$ com variâncias desconhecidas vimos que tinhamos 2 procedimentos diferentes:
  - Quando as variâncias são desconhecidas e iguais
  - Quando as variâncias são desconhecidas e diferentes
- Mas se as variâncias são desconhecidas, como podemos saber se são iguais ou diferentes?

Comparação de variâncias

- Quando fizemos inferência para a diferença de médias $(\mu_x - \mu_y)$ com variâncias desconhecidas vimos que tinhamos 2 procedimentos diferentes:
  - Quando as variâncias são desconhecidas e iguais
  - Quando as variâncias são desconhecidas e diferentes
- Mas se as variâncias são desconhecidas, como podemos saber se são iguais ou diferentes?
- Para responder essa pergunta precisamos fazer um teste para comparar as variâncias desconhecidas.

Comparação de variâncias

Para testar a igualdade de variâncias, precisamos primeiro conhecer a distribuição F (que será a distribuição que terá nossa estatística de teste).

Comparação de variâncias

Para testar a igualdade de variâncias, precisamos primeiro conhecer a distribuição F (que será a distribuição que terá nossa estatística de teste).

A Distribuição F

- A distribuição F tem 2 parêmetros: m (graus de liberdade do numerador) e n (graus de liberdade do denominador).

Comparação de variâncias

Para testar a igualdade de variâncias, precisamos primeiro conhecer a distribuição F (que será a distribuição que terá nossa estatística de teste).

A Distribuição F

- A distribuição F tem 2 parêmetros: m (graus de liberdade do numerador) e n (graus de liberdade do denominador).
- Se $X \sim N(0,1)$, então $X^2 \sim \chi^2_1$

Comparação de variâncias

Para testar a igualdade de variâncias, precisamos primeiro conhecer a distribuição F (que será a distribuição que terá nossa estatística de teste).

A Distribuição F

- A distribuição F tem 2 parêmetros: m (graus de liberdade do numerador) e n (graus de liberdade do denominador).
- Se $X \sim N(0,1)$, então $X^2 \sim \chi^2_1$
- Se $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \chi^2_1$, então $X_1 + \cdots + X_n \sim \chi^2_n$

Comparação de variâncias

Para testar a igualdade de variâncias, precisamos primeiro conhecer a distribuição F (que será a distribuição que terá nossa estatística de teste).

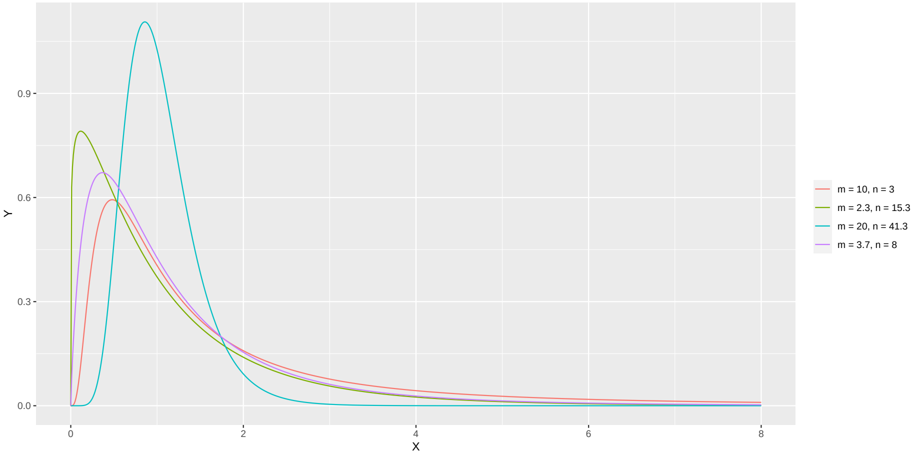
A Distribuição F

- A distribuição F tem 2 parêmetros: m (graus de liberdade do numerador) e n (graus de liberdade do denominador).
- Se $X \sim N(0, 1)$, então $X^2 \sim \chi^2_1$
- Se $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \chi^2_1$, então $X_1 + \cdots + X_n \sim \chi^2_n$
- Seja $X \sim \chi^2_m$ e $Y \sim \chi^2_n$, então

$$F = \frac{X/m}{Y/n} \sim F_{m,n}$$

Comparação de variâncias

A Distribuição F



Comparação de variâncias

Teorema

Sejam $X_1 \ldots, X_{n_x} \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ e sejam $Y_1 \ldots, Y_{n_y} \sim N(\mu_y, \sigma_y)$. Então

$$F = \frac{\hat{\sigma}_x^2/\sigma_x^2}{\hat{\sigma}_y^2/\sigma_y^2} \sim F_{n_x-1, n_y-1},$$

em que $\hat{\sigma}_x^2$ e $\hat{\sigma}_y^2$ são a variâncias amostral de $X_1 \ldots, X_{n_x}$ e $Y_1 \ldots, Y_{n_y}$, respectivamente.

Comparação de variâncias

$$F = \frac{\hat{\sigma}_x^2/\sigma_x^2}{\hat{\sigma}_y^2/\sigma_y^2} \sim F_{n_x-1,n_y-1}$$

Comparação de variâncias

$$F = \frac{\hat{\sigma}_x^2/\sigma_x^2}{\hat{\sigma}_y^2/\sigma_y^2} \sim F_{n_x-1,n_y-1}$$

Utilizaremos a estatística F para testar:

- $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$

Comparação de variâncias

$$F = \frac{\hat{\sigma}_x^2/\sigma_x^2}{\hat{\sigma}_y^2/\sigma_y^2} \sim F_{n_x-1,n_y-1}$$

Utilizaremos a estatística F para testar:

- $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$
- $H_0: \sigma_x^2 \leq \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1: \sigma_x^2 > \sigma_y^2$

Comparação de variâncias

$$F = \frac{\hat{\sigma}_x^2/\sigma_x^2}{\hat{\sigma}_y^2/\sigma_y^2} \sim F_{n_x-1,n_y-1}$$

Utilizaremos a estatística F para testar:

- $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$
- $H_0 : \sigma_x^2 \leq \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_y^2$
- $H_0 : \sigma_x^2 \geq \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 < \sigma_y^2$

Comparação de variâncias

$$F = \frac{\hat{\sigma}_x^2/\sigma_x^2}{\hat{\sigma}_y^2/\sigma_y^2} \sim F_{n_x-1,n_y-1}$$

Utilizaremos a estatística F para testar:

- $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$
- $H_0 : \sigma_x^2 \leq \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_y^2$
- $H_0 : \sigma_x^2 \geq \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 < \sigma_y^2$

Comparação de variâncias

$$F = \frac{\hat{\sigma}_x^2/\sigma_x^2}{\hat{\sigma}_y^2/\sigma_y^2} \sim F_{n_x-1,n_y-1}$$

Utilizaremos a estatística F para testar:

- $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$
- $H_0 : \sigma_x^2 \leq \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_y^2$
- $H_0 : \sigma_x^2 \geq \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 < \sigma_y^2$

- Mas como utilizaremos F para fazer os testes de não conhecemos as variâncias σ_x^2 nem σ_y^2?

Comparação de variâncias

$$F = \frac{\hat{\sigma}_x^2/\sigma_x^2}{\hat{\sigma}_y^2/\sigma_y^2} \sim F_{n_x-1,n_y-1}$$

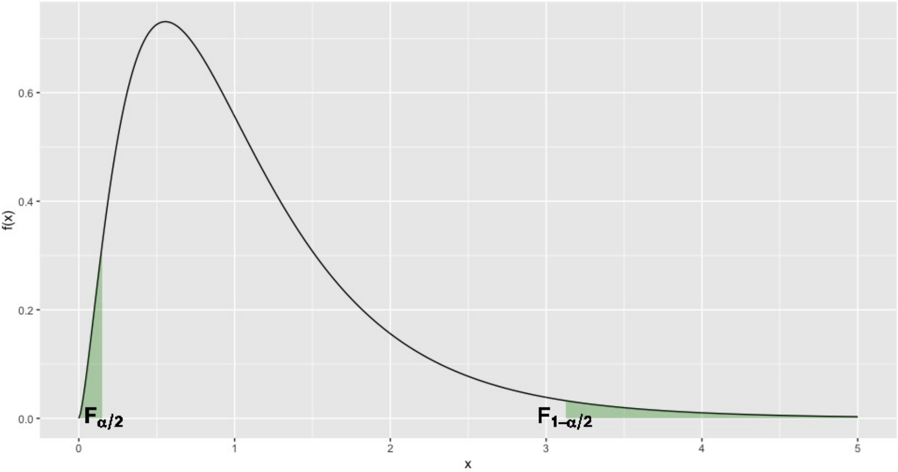
Utilizaremos a estatística F para testar:

- $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$
- $H_0 : \sigma_x^2 \leq \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_y^2$
- $H_0 : \sigma_x^2 \geq \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 < \sigma_y^2$

- Mas como utilizaremos F para fazer os testes de não conhecemos as variâncias σ_x^2 nem σ_y^2?
- Sob H_0 $(\sigma_x^2 = \sigma_y^2)$ temos que:

$$F = \frac{\hat{\sigma}_x^2}{\hat{\sigma}_y^2} \sim F_{n_x-1,n_y-1}$$

Comparação de variâncias



Comparação de variâncias

Seja

$$F = \hat{\sigma}_x^2 / \hat{\sigma}_y^2$$

- Se $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$, rejeitamos H_0 se $F > F_{1-\alpha/2, n_x-1, n_y-1}$ ou se $F < F_{\alpha/2, n_x-1, n_y-1}$

Comparação de variâncias

Seja

$$F = \hat{\sigma}_x^2/\hat{\sigma}_y^2$$

- Se $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$, rejeitamos H_0 se $F > F_{1-\alpha/2, n_x-1, n_y-1}$ ou se $F < F_{\alpha/2, n_x-1, n_y-1}$
- Se $H_0 : \sigma_x^2 \leq \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_y^2$, rejeitamos H_0 se $F > F_{1-\alpha, n_x-1, n_y-1}$

Comparação de variâncias

Seja

$$F = \hat{\sigma}_x^2/\hat{\sigma}_y^2$$

- Se $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$, rejeitamos H_0 se $F > F_{1-\alpha/2, n_x-1, n_y-1}$ ou se $F < F_{\alpha/2, n_x-1, n_y-1}$
- Se $H_0 : \sigma_x^2 \leq \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_y^2$, rejeitamos H_0 se $F > F_{1-\alpha, n_x-1, n_y-1}$
- Se $H_0 : \sigma_x^2 \geq \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 < \sigma_y^2$, rejeitamos H_0 se $F < F_{\alpha, n_x-1, n_y-1}$

Comparação de variâncias

Ejemplo: Considere o seguinte teste $H_0 : \mu_x = \mu_y \quad vs. \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y$. Duas amostras aleatórias de provenientes de uma $N(\mu_x, \sigma_x)$ e $n(\mu_y, \sigma_y)$ produziram os seguintes resultados:

- **Amostra 1:** $n_x = 5$, $\bar{x} = 25.36$, $\hat{\sigma}_x = 2.1$
- **Amostra 2:** $n_y = 10$, $\bar{y} = 15.64$, $\hat{\sigma}_y = 4.1$

Rejeitamos ou não rejeitamos H_0?

Comparação de variâncias

Ejemplo: Considere o seguinte teste $H_0 : \mu_x = \mu_y \quad vs. \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y$. Duas amostras aleatórias de provenientes de uma $N(\mu_x, \sigma_x)$ e $n(\mu_y, \sigma_y)$ produziram os seguintes resultados:

- **Amostra 1:** $n_x = 5$, $\bar{x} = 25.36$, $\hat{\sigma}_x = 2.1$
- **Amostra 2:** $n_y = 10$, $\bar{y} = 15.64$, $\hat{\sigma}_y = 4.1$

Rejeitamos ou não rejeitamos H_0?

Solução

- Nível de significância $\alpha = 0.05$

Comparação de variâncias

Ejemplo: Considere o seguinte teste $H_0 : \mu_x = \mu_y \quad vs. \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y$. Duas amostras aleatórias de provenientes de uma $N(\mu_x, \sigma_x)$ e $n(\mu_y, \sigma_y)$ produziram os seguintes resultados:

- **Amostra 1:** $n_x = 5$, $\bar{x} = 25.36$, $\hat{\sigma}_x = 2.1$
- **Amostra 2:** $n_y = 10$, $\bar{y} = 15.64$, $\hat{\sigma}_y = 4.1$

Rejeitamos ou não rejeitamos H_0?

Solução

- Nível de significância $\alpha = 0.05$
- Definimos nossa estatística de teste:

Comparação de variâncias

Ejemplo: Considere o seguinte teste $H_0 : \mu_x = \mu_y \quad vs. \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y$.
Duas amostras aleatórias de provenientes de uma $N(\mu_x, \sigma_x)$ e $n(\mu_y, \sigma_y)$ produziram os seguintes resultados:

- **Amostra 1:** $n_x = 5$, $\bar{x} = 25.36$, $\hat{\sigma}_x = 2.1$
- **Amostra 2:** $n_y = 10$, $\bar{y} = 15.64$, $\hat{\sigma}_y = 4.1$

Rejeitamos ou não rejeitamos H_0?

Solução

- Nível de significância $\alpha = 0.05$
- Definimos nossa estatística de teste:
  - Mas para saber qual estatística de teste utilizar precisamos saber se as variâncias são iguais ou diferentes!

Comparação de variâncias

Ejemplo: Considere o seguinte teste $H_0 : \mu_x = \mu_y \quad vs. \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y$.
Duas amostras aleatórias de provenientes de uma $N(\mu_x, \sigma_x)$ e $n(\mu_y, \sigma_y)$ produziram os seguintes resultados:

- **Amostra 1:** $n_x = 5$, $\bar{x} = 25.36$, $\hat{\sigma}_x = 2.1$
- **Amostra 2:** $n_y = 10$, $\bar{y} = 15.64$, $\hat{\sigma}_y = 4.1$

Rejeitamos ou não rejeitamos H_0?

Solução

- Nível de significância $\alpha = 0.05$
- Definimos nossa estatística de teste:
  - Mas para saber qual estatística de teste utilizar precisamos saber se as variâncias são iguais ou diferentes!
  - Precisamos então fazer um teste de hipóteses para saber se as variâncias são iguais ou diferentes

Comparação de variâncias

$$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$$

- Nível de significância $\alpha = 0.05$

Comparação de variâncias

$$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$$

- Nível de significância $\alpha = 0.05$
- Definimos a estatística de teste:

$$F = \hat{\sigma}_x^2 / \hat{\sigma}_y^2 = 2.1^2 / 4.1^2 = 0.2623438$$

Comparação de variâncias

$$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$$

- Nível de significância $\alpha = 0.05$
- Definimos a estatística de teste:

$$F = \hat{\sigma}_x^2 / \hat{\sigma}_y^2 = 2.1^2/4.1^2 = 0.2623438$$

- Como $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$, rejeitamos H_0 se $F > F_{1-\alpha/2, n_x-1, n_y-1}$ ou $F < F_{\alpha/2, n_x-1, n_y-1}$

Comparação de variâncias

$$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$$

- Nível de significância $\alpha = 0.05$
- Definimos a estatística de teste:

$$F = \hat{\sigma}_x^2 / \hat{\sigma}_y^2 = 2.1^2/4.1^2 = 0.2623438$$

- Como $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$, rejeitamos H_0 se $F > F_{1-\alpha/2, n_x-1, n_y-1}$ ou $F < F_{\alpha/2, n_x-1, n_y-1}$

Comparação de variâncias

$$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$$

- Nível de significância $\alpha = 0.05$
- Definimos a estatística de teste:

$$F = \hat{\sigma}_x^2 / \hat{\sigma}_y^2 = 2.1^2/4.1^2 = 0.2623438$$

- Como $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$, rejeitamos H_0 se $F > F_{1-\alpha/2, n_x-1, n_y-1}$ ou $F < F_{\alpha/2, n_x-1, n_y-1}$

```
alpha = 0.05; nx = 5; ny = 10
c(qf(1-alpha/2, nx-1, ny-1), qf(alpha/2, nx-1, ny-1))
```

```
## [1] 4.7180785 0.1123005
```

Comparação de variâncias

$$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$$

- Nível de significância $\alpha = 0.05$
- Definimos a estatística de teste:

$$F = \hat{\sigma}_x^2 / \hat{\sigma}_y^2 = 2.1^2/4.1^2 = 0.2623438$$

- Como $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$, rejeitamos H_0 se $F > F_{1-\alpha/2, n_x-1, n_y-1}$ ou $F < F_{\alpha/2, n_x-1, n_y-1}$

```
alpha = 0.05; nx = 5; ny = 10
c(qf(1-alpha/2, nx-1, ny-1), qf(alpha/2, nx-1, ny-1))
```

```
## [1] 4.7180785 0.1123005
```

- $0.26 < 0.1123005$ ou $0.26 > 4.7180785$ **?** Não, então não rejeitamos H_0 e concluimos que não temos evidência para dizer que as variâncias são diferentes.

Comparação de variâncias

Com os resultados do teste de igualdade de variância, escolheremos a estatística de teste apropriada para testar

$$H_0 : \mu_x = \mu_y \quad vs. \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y$$

- Definindo estatística de teste (caso variâncias desconhecidas e iguais):

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - D_0}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{25.36 - 15.64}{\sqrt{12.17615}\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{10}}} = 5.085699$$

em que $s_p^2 = \dfrac{(n_1 - 1)\hat{\sigma}_x^2 + (n_2 - 1)\hat{\sigma}_y^2}{n_1 + n_2 - 2} = 12.17615.$

Comparação de variâncias

$$H_0 : \mu_x = \mu_y \quad vs. \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y$$

- $t = 5.085699$

Comparação de variâncias

$$H_0 : \mu_x = \mu_y \quad vs. \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y$$

- $t = 5.085699$
- Como $H_0 : \mu_x = \mu_y \quad vs. \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y$, rejeitamos H_0 se $|t| > t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2}$

Comparação de variâncias

$$H_0 : \mu_x = \mu_y \quad vs. \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y$$

- $t = 5.085699$
- Como $H_0 : \mu_x = \mu_y \quad vs. \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y$, rejeitamos H_0 se $|t| > t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2}$

Comparação de variâncias

$$H_0 : \mu_x = \mu_y \quad vs. \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y$$

- $t = 5.085699$
- Como $H_0 : \mu_x = \mu_y \quad vs. \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y$, rejeitamos H_0 se $|t| > t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2}$

```r
alpha = 0.05; n1 = 5; n2 = 10
qt(1-alpha/2, n1 + n2 -2)
```

```
## [1] 2.160369
```

Comparação de variâncias

$$H_0 : \mu_x = \mu_y \quad vs. \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y$$

- $t = 5.085699$
- Como $H_0 : \mu_x = \mu_y \quad vs. \quad H_1 : \mu_x \neq \mu_y$, rejeitamos H_0 se $|t| > t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2}$

```r
alpha = 0.05; n1 = 5; n2 = 10
qt(1-alpha/2, n1 + n2 -2)
```

```
## [1] 2.160369
```

- $|5.085699| > 2.160369$ **?** Sim, então rejeitamos H_0 e concluimos que $\mu_x \neq \mu_y$.

Análise de variância

Análise de variância

- Até agora temos visto testes de hipóteses para comparar duas médias populacionais.

Análise de variância

- Até agora temos visto testes de hipóteses para comparar duas médias populacionais.
- Em algumas circunstâncias podemos estar interessados em testar se a média populacional de três ou mais populações são iguais.

Análise de variância

- Até agora temos visto testes de hipóteses para comparar duas médias populacionais.
- Em algumas circunstâncias podemos estar interessados em testar se a média populacional de três ou mais populações são iguais.
- Para responder esta pergunta, utilizaremos um procedimento conhecido como **análise de variància** (ou **ANOVA**).

Análise de variância

Case: Um teste de habilidades é aplicado em uma amostra de 100 trabalhadores de cada um dos três centros de distribuição (CD) da *Via Varejo*. Roberto Fulcherberguer, o CEO da empresa, gostaria de saber se em média, os três centros de distribuição possuem funcionários com o mesmo nível de habilidades. Os resultados obtidos nas amostras foram:

- CD1: $\bar{x}_1 = 79$, $\hat{\sigma}_1 = 5.83$
- CD2: $\bar{x}_2 = 74$, $\hat{\sigma}_2 = 4.47$
- CD3: $\bar{x}_3 = 66$, $\hat{\sigma}_3 = 5.66$

Análise de variância

Case: Um teste de habilidades é aplicado em uma amostra de 100 trabalhadores de cada um dos três centros de distribuição (CD) da *Via Varejo*. Roberto Fulcherberguer, o CEO da empresa, gostaria de saber se em média, os três centros de distribuição possuem funcionários com o mesmo nível de habilidades. Os resultados obtidos nas amostras foram:

- CD1: $\bar{x}_1 = 79$, $\hat{\sigma}_1 = 5.83$
- CD2: $\bar{x}_2 = 74$, $\hat{\sigma}_2 = 4.47$
- CD3: $\bar{x}_3 = 66$, $\hat{\sigma}_3 = 5.66$

Se denotarmos por μ_1, μ_2, μ_3 as médias populacionais correspondentes às puntuações dos 3 CDs. O CEO quer testar:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad vs. \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdade}$$

Análise de variância

Para testar

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad vs. \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdade}$$

nenhum dos testes vistos até agora são úteis.

Análise de variância

Para testar

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad vs. \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdade}$$

nenhum dos testes vistos até agora são úteis.

Utilizaremos ANOVA (análise de variância) para responder esta pergunta:

Análise de variância

Para testar

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad vs. \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdade}$$

nenhum dos testes vistos até agora são úteis.

Utilizaremos ANOVA (análise de variância) para responder esta pergunta:

Hipóteses ANOVA:

- **Independência:** entre as observações (Exemplo: a pontuação que cada trabalhador obteve é independente da obtida por outro funcionário)

Análise de variância

Para testar

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad vs. \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdade}$$

nenhum dos testes vistos até agora são úteis.

Utilizaremos ANOVA (análise de variância) para responder esta pergunta:

Hipóteses ANOVA:

- **Independência:** entre as observações (Exemplo: a pontuação que cada trabalhador obteve é independente da obtida por outro funcionário)
- **Normalidade:** a variável de interesse de cada grupo é normalmente distribuida.

Análise de variância

Para testar

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad vs. \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdade}$$

nenhum dos testes vistos até agora são úteis.

Utilizaremos ANOVA (análise de variância) para responder esta pergunta:

Hipóteses ANOVA:

- **Independência:** entre as observações (Exemplo: a pontuação que cada trabalhador obteve é independente da obtida por outro funcionário)
- **Normalidade:** a variável de interesse de cada grupo é normalmente distribuida.
- **Igualdade de variâncias:** os grupos tem a mesma variância (variâncias desconhecidas mas iguais)

Análise de variância

Intuição

- Se as três médias populacionais fossem iguais, esperamos que as três médias amostrais estejam próximas entre si.

Análise de variância

Intuição

- Se as três médias populacionais fossem iguais, esperamos que as três médias amostrais estejam próximas entre si.
- Quanto mais próximas estejam as médias amostrais entre si, teremos mais evidência para concluir que as médias populacionais são iguais.

Análise de variância

Intuição

- Se as três médias populacionais fossem iguais, esperamos que as três médias amostrais estejam próximas entre si.
- Quanto mais próximas estejam as médias amostrais entre si, teremos mais evidência para concluir que as médias populacionais são iguais.
- Por outro lado, quando mais diferirem as médias amostrais entre si, teremos mais evidência para dizer que as médias populacionais não são iguais.

Análise de variância

Intuição

- Se as três médias populacionais fossem iguais, esperamos que as três médias amostrais estejam próximas entre si.
- Quanto mais próximas estejam as médias amostrais entre si, teremos mais evidência para concluir que as médias populacionais são iguais.
- Por outro lado, quando mais diferirem as médias amostrais entre si, teremos mais evidência para dizer que as médias populacionais não são iguais.
- Em outras palavras, se a variabilidade entre entre as médias amostrais for pequena, teremos evidência favoravel (não rejeitar) a $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, enquanto que se a variabilidade entre as médias amostrais for grande, teremos evidència contraria (rejeitar) a H_0.

Análise de variância

Intuição

- Se as três médias populacionais fossem iguais, esperamos que as três médias amostrais estejam próximas entre si.
- Quanto mais próximas estejam as médias amostrais entre si, teremos mais evidência para concluir que as médias populacionais são iguais.
- Por outro lado, quando mais diferirem as médias amostrais entre si, teremos mais evidência para dizer que as médias populacionais não são iguais.
- Em outras palavras, se a variabilidade entre entre as médias amostrais for pequena, teremos evidência favoravel (não rejeitar) a $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, enquanto que se a variabilidade entre as médias amostrais for grande, teremos evidència contraria (rejeitar) a H_0.
- Ademais, se H_0 for verdadeira implica que todas as amostras vem de uma mesma $N(\mu, \sigma)$

Análise de variância

Intuição

- Voltando ao exemplo, se H_0 for verdade, então podemos pensar em $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ e $\bar{x}_3$ como três números extraidos de uma $N(\mu, \sigma_{\bar{x}})$.

Análise de variância

Intuição

- Voltando ao exemplo, se H_0 for verdade, então podemos pensar em $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ e $\bar{x}_3$ como três números extraidos de uma $N(\mu, \sigma_{\bar{x}})$.
- Então podemos estimar μ por

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3}{3}$$

e podemos estimar $\sigma^2_{\bar{x}}$ por

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{x}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + (\bar{x}_2 - \bar{x})^2 + (\bar{x}_3 - \bar{x})^2}{3-1}.$$

Como $\sigma^2_{\bar{x}} = \sigma^2/n$, temos que $\hat{\sigma}^2 = n\hat{\sigma}^2_{\bar{x}}$.

Análise de variância
Intuição

- Então temos $\hat{\sigma}^2$ uma estimativa não viesada de σ^2

Análise de variância
Intuição

- Então temos $\hat{\sigma}^2$ uma estimativa não viesada de σ^2
- Por outro lado, $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$ e $\hat{\sigma}_3^2$ são também estimativas não viesadas de σ^2

Análise de variância

Intuição

- Então temos $\hat{\sigma}^2$ uma estimativa não viesada de σ^2
- Por outro lado, $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$ e $\hat{\sigma}_3^2$ são também estimativas não viesadas de σ^2
- Note que $\dfrac{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2}{3}$ também é uma estimativa não viesada de σ^2

Análise de variância

Intuição

- Então temos $\hat{\sigma}^2$ uma estimativa não viesada de σ^2
- Por outro lado, $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$ e $\hat{\sigma}_3^2$ são também estimativas não viesadas de σ^2
- Note que $\dfrac{\hat{\sigma}_1^2+\hat{\sigma}_2^2+\hat{\sigma}_3^2}{3}$ também é uma estimativa não viesada de σ^2
- Se H_0 for verdadeira tanto $\hat{\sigma}^2$ quanto $(\hat{\sigma}_1^2+\hat{\sigma}_2^2+\hat{\sigma}_3^2)/3$ serão ambas próximas entre si.

Análise de variância
Intuição

- Então temos $\hat{\sigma}^2$ uma estimativa não viesada de σ^2
- Por outro lado, $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$ e $\hat{\sigma}_3^2$ são também estimativas não viesadas de σ^2
- Note que $\dfrac{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2}{3}$ também é uma estimativa não viesada de σ^2
- Se H_0 for verdadeira tanto $\hat{\sigma}^2$ quanto $(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2)/3$ serão ambas próximas entre si.
- Isso significa que o quociente entre eles deve ser próximo de um.

Análise de variância

Intuição

- Então temos $\hat{\sigma}^2$ uma estimativa não viesada de σ^2
- Por outro lado, $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$ e $\hat{\sigma}_3^2$ são também estimativas não viesadas de σ^2
- Note que $\dfrac{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2}{3}$ também é uma estimativa não viesada de σ^2
- Se H_0 for verdadeira tanto $\hat{\sigma}^2$ quanto $(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2)/3$ serão ambas próximas entre si.
- Isso significa que o quociente entre eles deve ser próximo de um.

Análise de variância
Intuição

- Então temos $\hat{\sigma}^2$ uma estimativa não viesada de σ^2
- Por outro lado, $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$ e $\hat{\sigma}_3^2$ são também estimativas não viesadas de σ^2
- Note que $\dfrac{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2}{3}$ também é uma estimativa não viesada de σ^2
- Se H_0 for verdadeira tanto $\hat{\sigma}^2$ quanto $(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2)/3$ serão ambas próximas entre si.
- Isso significa que o quociente entre eles deve ser próximo de um.

ANOVA baseia-se em duas estimativas independêntes da variância comum σ^2. Uma delas, $\hat{\sigma}^2$ baseia-se na variabilidade existente entre as próprias médias amostrais (chamada variância entre tratamentos). A outra, baseia-se na variabilidade dos dados existente dentro de cada grupo (chamada variância dentro dos tratamentos). Comparando essas duas estimativas seremos capazes de testar se as médias populacionais são iguais ou não.

Análise de variância (ANOVA)

Sejam as hipóteses:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k. \quad vs. \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdade},$$

em que μ_j $(j = 1, \ldots, k)$ é a média da j-ésima população.

Análise de variância (ANOVA)

Sejam as hipóteses:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k. \quad vs. \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdade},$$

em que μ_j $(j = 1, \ldots, k)$ é a média da j-ésima população.

Sejam:

- n_j: tamanho da a.a. extraida da j-ésima população;
- x_{ij}: i-ésimo elemento da a.a extraida da j-ésima população;
- $\bar{x}_j$: média amostral da a.a. da j-ésima população;
- $\hat{\sigma}_j^2$: variância amostral da a.a. da j-ésima população.

Análise de variância (ANOVA)

Sejam as hipóteses:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k. \quad vs. \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdade},$$

em que μ_j $(j = 1, \ldots, k)$ é a média da j-ésima população.

Sejam:

- n_j: tamanho da a.a. extraida da j-ésima população;
- x_{ij}: i-ésimo elemento da a.a extraida da j-ésima população;
- $\bar{x}_j$: média amostral da a.a. da j-ésima população;
- $\hat{\sigma}_j^2$: variância amostral da a.a. da j-ésima população.

Por outro lado, denotemos por $\bar{\bar{x}}$ a média global de todas as observações,

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_T},$$

em que $n_T = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

Análise de variância (ANOVA)

$$SQT = SQTr + SQE$$

Análise de variância (ANOVA)

$$SQT = SQTr + SQE$$

- **Soma de Quadrados Totais**

$$SQT = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i}^{n_j} (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2$$

Análise de variância (ANOVA)

$$SQT = SQTr + SQE$$

- **Soma de Quadrados Totais**

$$SQT = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i}^{n_j} (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2$$

- **Soma de Quadrados entre tratamentos**

$$SQTr = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i}^{n_j} (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$$

Análise de variância (ANOVA)

$$SQT = SQTr + SQE$$

- **Soma de Quadrados Totais**

$$SQT = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i}^{n_j} (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2$$

- **Soma de Quadrados entre tratamentos**

$$SQTr = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i}^{n_j} (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$$

- **Soma de Quadrados dos Erros (ou dentro dos tratamentos)**

$$SQE = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

Análise de variância (ANOVA)

Fonte de Variação	g.l	Soma dos Q.	Q. Médios	F
Tratamento	$k-1$	SQTr	$QMTr = \frac{SQTr}{k-1}$	$\frac{QMTr}{QME}$
Erro	$n_T - k$	SQE	$QME = \frac{SQE}{n_T - k}$	
Total	$n_T - 1$	SQT		

Análise de variância (ANOVA)

Fonte de Variação	g.l	Soma dos Q.	Q. Médios	F
Tratamento	$k-1$	SQTr	$QMTr = \frac{SQTr}{k-1}$	$\frac{QMTr}{QME}$
Erro	$n_T - k$	SQE	$QME = \frac{SQE}{n_T - k}$	
Total	$n_T - 1$	SQT		

Pode-se provar que, sob H_0 e sob as hipóteses do ANOVA:

$$F = \frac{QMTr}{QME} \sim F_{k-1, n_T - k}$$

Análise de variância (ANOVA)

Fonte de Variação	g.l	Soma dos Q.	Q. Médios	F
Tratamento	$k-1$	SQTr	$QMTr = \frac{SQTr}{k-1}$	$\frac{QMTr}{QME}$
Erro	$n_T - k$	SQE	$QME = \frac{SQE}{n_T - k}$	
Total	$n_T - 1$	SQT		

Pode-se provar que, sob H_0 e sob as hipóteses do ANOVA:

$$F = \frac{QMTr}{QME} \sim F_{k-1, n_T - k}$$

Assim, rejeitamos $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$ se $F > F_{1-\alpha, k-1, n_T-k}$

Análise de variância (ANOVA)

Note que se $n_j = n \quad \forall j$:

- $SQTr = \sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = n\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$, e então

$$QMTr = \frac{SQTr}{k-1} = n\frac{\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2}{k-1}$$ é o nosso $\hat{\sigma}^2$ obtido no *case*.

Análise de variância (ANOVA)

Note que se $n_j = n \quad \forall j$:

- $SQTr = \sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = n\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$, e então
$$QMTr = \frac{SQTr}{k-1} = n\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2}{k-1}$$ é o nosso $\hat{\sigma}^2$ obtido no *case*.
- De forma semelhante, $MQE = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{n_T - k}$, mas como $n_j = n$ e $n_T = n_1 + \cdots + n_k = kn$ temos que,

$$QME = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k}\overbrace{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2}^{(n-1)\hat{\sigma}_j^2}}{k(n-1)} = \frac{\sum\limits_{i}^{k}\hat{\sigma}_j^2}{k}.$$

Análise de variância (ANOVA)

Voltando ao nosso *case*. O CEO da *Via Varejo* quer testar:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad vs. \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdade}$$

Análise de variância (ANOVA)

Voltando ao nosso *case*. O CEO da *Via Varejo* quer testar:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad vs. \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdade}$$

- **Amostra do CD1**: $\bar{x}_1 = 79$, $\hat{\sigma}_1 = 5.83$, $n_1 = 100$
- **Amostra do CD2**: $\bar{x}_2 = 74$, $\hat{\sigma}_2 = 4.47$, $n_2 = 100$
- **AMostra do CD3**: $\bar{x}_3 = 66$, $\hat{\sigma}_3 = 5.66$, $n_3 = 100$

Análise de variância (ANOVA)

Voltando ao nosso *case*. O CEO da *Via Varejo* quer testar:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad vs. \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdade}$$

- **Amostra do CD1**: $\bar{x}_1 = 79$, $\hat{\sigma}_1 = 5.83$, $n_1 = 100$
- **Amostra do CD2**: $\bar{x}_2 = 74$, $\hat{\sigma}_2 = 4.47$, $n_2 = 100$
- **AMostra do CD3**: $\bar{x}_3 = 66$, $\hat{\sigma}_3 = 5.66$, $n_3 = 100$

Fonte de Variação	g.l	Soma dos Q.	Q. Médios	F
Tratamento	$k-1$	SQTr	$QMTr = \frac{SQTr}{k-1}$	$\frac{QMTr}{QME}$
Erro	$n_T - k$	SQE	$QME = \frac{SQE}{n_T - k}$	
Total	$n_T - 1$	SQT		

Análise de variância (ANOVA)

- **Amostra do CD1**: $\bar{x}_1 = 79$, $\hat{\sigma}_1 = 5.83$, $n_1 = 100$
- **Amostra do CD2**: $\bar{x}_2 = 74$, $\hat{\sigma}_2 = 4.47$, $n_2 = 100$
- **AMostra do CD3**: $\bar{x}_3 = 66$, $\hat{\sigma}_3 = 5.66$, $n_3 = 100$

Análise de variância (ANOVA)

- **Amostra do CD1**: $\bar{x}_1 = 79$, $\hat{\sigma}_1 = 5.83$, $n_1 = 100$
- **Amostra do CD2**: $\bar{x}_2 = 74$, $\hat{\sigma}_2 = 4.47$, $n_2 = 100$
- **AMostra do CD3**: $\bar{x}_3 = 66$, $\hat{\sigma}_3 = 5.66$, $n_3 = 100$

Como $k = 3$ grupos e $n_j = n \quad j = 1, \dots, 3$:

- $\bar{\bar{x}} = \dfrac{79 + 74 + 66}{3} = 73$

Análise de variância (ANOVA)

- **Amostra do CD1**: $\bar{x}_1 = 79$, $\hat{\sigma}_1 = 5.83$, $n_1 = 100$
- **Amostra do CD2**: $\bar{x}_2 = 74$, $\hat{\sigma}_2 = 4.47$, $n_2 = 100$
- **AMostra do CD3**: $\bar{x}_3 = 66$, $\hat{\sigma}_3 = 5.66$, $n_3 = 100$

Como $k = 3$ grupos e $n_j = n \quad j = 1, \ldots, 3$:

- $\bar{\bar{x}} = \dfrac{79 + 74 + 66}{3} = 73$
- $QMTr = n\dfrac{\sum_{j=1}^{3}(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2}{3-1} =$
  $100 \times \dfrac{(79-73)^2 + (74-73)^2 + (66-73)^2}{2} = 4300$

Análise de variância (ANOVA)

- **Amostra do CD1**: $\bar{x}_1 = 79$, $\hat{\sigma}_1 = 5.83$, $n_1 = 100$
- **Amostra do CD2**: $\bar{x}_2 = 74$, $\hat{\sigma}_2 = 4.47$, $n_2 = 100$
- **AMostra do CD3**: $\bar{x}_3 = 66$, $\hat{\sigma}_3 = 5.66$, $n_3 = 100$

Como $k = 3$ grupos e $n_j = n \quad j = 1, \dots, 3$:

- $\bar{\bar{x}} = \dfrac{79 + 74 + 66}{3} = 73$
- $QMTr = n\dfrac{\sum_{j=1}^{3}(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2}{3-1} =$
  $100 \times \dfrac{(79-73)^2 + (74-73)^2 + (66-73)^2}{2} = 4300$
- $QME = \dfrac{\sum_i^3 \hat{\sigma}_j^2}{3} = \dfrac{5.83^2 + 4.47^2 + 5.66^2}{3} = 28.66847$

Análise de variância (ANOVA)

- **Amostra do CD1**: $\bar{x}_1 = 79$, $\hat{\sigma}_1 = 5.83$, $n_1 = 100$
- **Amostra do CD2**: $\bar{x}_2 = 74$, $\hat{\sigma}_2 = 4.47$, $n_2 = 100$
- **AMostra do CD3**: $\bar{x}_3 = 66$, $\hat{\sigma}_3 = 5.66$, $n_3 = 100$

Como $k = 3$ grupos e $n_j = n \quad j = 1, \ldots, 3$:

- $\bar{\bar{x}} = \dfrac{79 + 74 + 66}{3} = 73$
- $QMTr = n\dfrac{\sum_{j=1}^{3}(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2}{3-1} =$
  $100 \times \dfrac{(79-73)^2 + (74-73)^2 + (66-73)^2}{2} = 4300$
- $QME = \dfrac{\sum_i^3 \hat{\sigma}_j^2}{3} = \dfrac{5.83^2 + 4.47^2 + 5.66^2}{3} = 28.66847$
- $F = QMTr/QME = 4300/28.66847 = 149.9906$

Análise de variância (ANOVA)

- F $= 149.9906$

Análise de variância (ANOVA)

- $F = 149.9906$

Análise de variância (ANOVA)

- $F = 149.9906$

```
k = 3; n = 100; alpha = 0.05
qf(1-alpha, k-1, 3*n-k)
```

```
## [1] 3.026153
```

Análise de variância (ANOVA)

- F $= 149.9906$

```
k = 3; n = 100; alpha = 0.05
qf(1-alpha, k-1, 3*n-k)
```

```
## [1] 3.026153
```

149.9906$>$ 3.026153**?** Sim, então rejeitamos H_0.

Análise de variância (ANOVA)

Exemplo: Quatro observações foram selecionadas de cada uma de três diferentes populações. Os dados obtidos são os seguintes:

Observação	Amostra 1	Amostra 2	Amostra 3
1	165	174	169
2	149	164	154
3	156	180	161
4	142	158	148

Teste

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad vs. \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdadeira}$$

Análise de variância (ANOVA)

```
x1 = c(165, 149, 156, 142)  # amostra 1
x2 = c(174, 164, 180, 158)  # amostra 2
x3 = c(169, 154, 161, 148)  # amostra 3
x = c(x1,x2,x3)             # todos os elementos
# Calculamos as médias:
m_g = mean(x)               # média global
m_1 = mean(x1)              # média da amostra 1
m_2 = mean(x2)              # média da amostra 2
m_3 = mean(x3)              # média da amostra 3
# Tamanhos de amostra em cada grupo
n1 = length(x1)             # Obs na amostra 1
n2 = length(x2)             # Obs na amostra 2
n3 = length(x3)             # Obs na amostra 3
```

Análise de variância (ANOVA)

$$SQT = SQTr + SQE$$

$$SQT = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i}^{n_j}(x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 \quad SQTr = \sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$$

Análise de variância (ANOVA)

$$SQT = SQTr + SQE$$

$$SQT = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i}^{n_j} (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 \quad SQTr = \sum_{j=1}^{k} n_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$$

```
# Soma de Quadrados Totais
SQT = sum((x-m_g)^2)     # Cuidado! sum((x-m_g)^2) != sum(x-mg)^2
# Soma de Quadrados dos Tratamentos
SQTr = n1*(m_1-m_g)^2 + n2*(m_2-m_g)^2 + n3*(m_3-m_g)^2
# Soma de Quadrados dos Erros
SQE = SQT -  SQTr
# Imprimindo resultados
c(SQT, SQTr, SQE)
```

```
## [1] 1364  536  828
```

Análise de variância (ANOVA)

Fonte de Variação	g.l	Soma dos Q.	Q. Médios	F
Tratamento	$k-1$	SQTr	$QMTr = \frac{SQTr}{k-1}$	$\frac{QMTr}{QME}$
Erro	$n_T - k$	SQE	$QME = \frac{SQE}{n_T - k}$	
Total	$n_T - 1$	SQT		

Análise de variância (ANOVA)

Fonte de Variação	g.l	Soma dos Q.	Q. Médios	F
Tratamento	$k-1$	SQTr	$QMTr = \dfrac{SQTr}{k-1}$	$\dfrac{QMTr}{QME}$
Erro	$n_T - k$	SQE	$QME = \dfrac{SQE}{n_T - k}$	
Total	$n_T - 1$	SQT		

Fonte de Variação	g.l	Soma dos Q.	Q. Médios	F
Tratamento	2	536	$QMTr = 268$	2.9130435
Erro	9	828	$QME = 92$	
Total	11	1364		

Análise de variância (ANOVA)

Então rejeitamos $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ se $F > F_{1-\alpha,k-1,n_T-k}$

Análise de variância (ANOVA)

Então rejeitamos $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ se $F > F_{1-\alpha,k-1,n_T-k}$

```
alpha = 0.05; k = 3; nT = n1 + n2 + n3
qf(1-alpha, k-1, nT-k)
```

```
## [1] 4.256495
```

Análise de variância (ANOVA)

Então rejeitamos $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ se $F > F_{1-\alpha,k-1,n_T-k}$

```
alpha = 0.05; k = 3; nT = n1 + n2 + n3
qf(1-alpha, k-1, nT-k)
```

```
## [1] 4.256495
```

$2.9130435 > 4.256495$? Não, então não rejeitamos H_0.

Análise de variância (ANOVA)

No **R** existe uma forma fácil de fazer ANOVA.

Os dados do exemplo anterior estão disponíveis aqui.

Análise de variância (ANOVA)

No **R** existe uma forma fácil de fazer ANOVA.

Os dados do exemplo anterior estão disponíveis aqui.

```
dados <- read.csv("anova_dados.csv", sep = ";")
oneway.test(V1 ~ grupo, data = dados, var.equal = TRUE)
```

```
##
##  One-way analysis of means
##
## data:  V1 and grupo
## F = 2.913, num df = 2, denom df = 9, p-value = 0.1058
```

Como p-valor não é menor do que $\alpha = 0.05$, não rejeitamos H_0

Leituras recomendadas

- Anderson, D. R; Sweeney, D. J.; e Williams, T. A. (2008). *Estatística Aplicada à Administração e Economia*. 2ed. Cengage Learning. **Cap 10**
- Morettin, P.A; e Bussab, W. de O. (2004). *Estatística Básica*. 5ed, Saraiva. **Cap 13**