MAD211 - Estatística para Administração

Amostragem e Distribuições Amostrais

Prof. Carlos Trucíos
carlos.trucios@facc.ufrj.br
ctruciosm.github.io

Faculdade de Administração e Ciências Contábeis,
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Aula 15

Amostragem

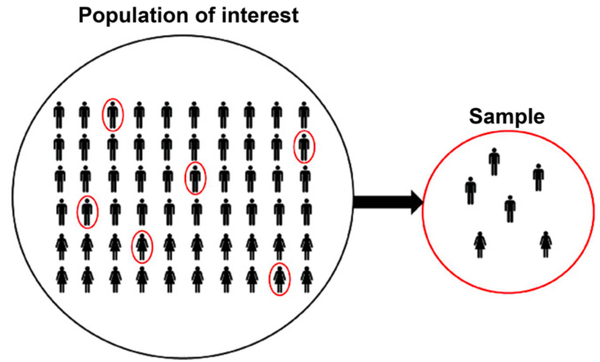
Estimação pontual

Distribuições amostrais

Métodos de amostragem

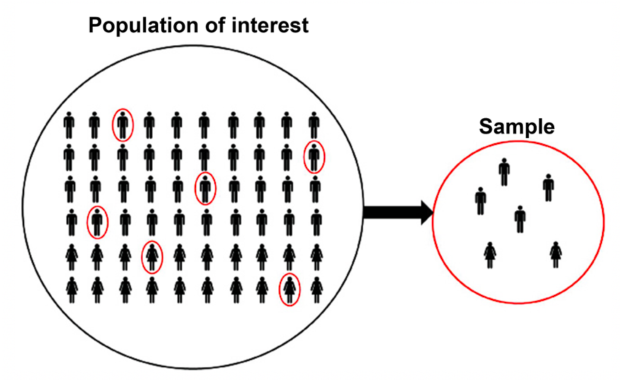
Amostragem

Amostragem



- **População**: conjunto de todos os elementos de interesse no estudo.

Amostragem



- **População**: conjunto de todos os elementos de interesse no estudo.
- **Amostra**: subconjunto da população

Amostragem

Característica numéricas da população (média, proporção, desvio padrão, etc) são chamados de **parâmetros**

Amostragem

Característica numéricas da população (média, proporção, desvio padrão, etc) são chamados de **parâmetros**

Um dos propósitos da inferência estatística é estimar e testar hipóteses a respeito dos parâmetros populacionais utilizando a informação contida na amostra

Amostragem

Característica numéricas da população (média, proporção, desvio padrão, etc) são chamados de **parâmetros**

Um dos propósitos da inferência estatística é estimar e testar hipóteses a respeito dos parâmetros populacionais utilizando a informação contida na amostra

Por que utilizar uma amostra?

Amostragem

Característica numéricas da população (média, proporção, desvio padrão, etc) são chamados de **parâmetros**

Um dos propósitos da inferência estatística é estimar e testar hipóteses a respeito dos parâmetros populacionais utilizando a informação contida na amostra

Por que utilizar uma amostra?

- Coletar informação da população toda é caro

Amostragem

Característica numéricas da população (média, proporção, desvio padrão, etc) são chamados de **parâmetros**

Um dos propósitos da inferência estatística é estimar e testar hipóteses a respeito dos parâmetros populacionais utilizando a informação contida na amostra

Por que utilizar uma amostra?

- Coletar informação da população toda é caro
- Coletar informação da população toda é inviável

Amostragem

Característica numéricas da população (média, proporção, desvio padrão, etc) são chamados de **parâmetros**

Um dos propósitos da inferência estatística é estimar e testar hipóteses a respeito dos parâmetros populacionais utilizando a informação contida na amostra

Por que utilizar uma amostra?

- Coletar informação da população toda é caro
- Coletar informação da população toda é inviável

Amostragem

Característica numéricas da população (média, proporção, desvio padrão, etc) são chamados de **parâmetros**

Um dos propósitos da inferência estatística é estimar e testar hipóteses a respeito dos parâmetros populacionais utilizando a informação contida na amostra

Por que utilizar uma amostra?

- Coletar informação da população toda é caro
- Coletar informação da população toda é inviável

Os resultados da amostra apresentam apenas uma estimativa do verdadeiro (e desconhecido) valor do parâmetro. **Com métodos apropriados de amostragem, obteremos "boas"estimativas**

Amostragem aleatória simples

Amostragem aleatória simples é um dos métodos de amostragem mais comuns

[1] Existem amostras aleatórias com e sem reposição

Amostragem aleatória simples

Amostragem aleatória simples é um dos métodos de amostragem mais comuns

Definição

Uma amostra aleatória simples (a.a) de tamanho n de uma população de tamanho N é uma amostra selecionada de forma independente e sem reposição[1] de tal maneira que cada elemento na amostra tenha a mesma probabilidade de ser escolhido.

[1] Existem amostras aleatórias com e sem reposição

Amostragem aleatória simples

Amostragem aleatória simples é um dos métodos de amostragem mais comums

Definição

Uma amostra aleatória simples (a.a) de tamanho n de uma população de tamanho N é uma amostra selecionada de forma independente e sem reposição[1] de tal maneira que cada elemento na amostra tenha a mesma probabilidade de ser escolhido.

- Antigamente se utilizaba uma Tabela de número aleatórios

[1] Existem amostras aleatórias com e sem reposição

Amostragem aleatória simples

Amostragem aleatória simples é um dos métodos de amostragem mais comums

Definição

Uma amostra aleatória simples (a.a) de tamanho n de uma população de tamanho N é uma amostra selecionada de forma independente e sem reposição[1] de tal maneira que cada elemento na amostra tenha a mesma probabilidade de ser escolhido.

- Antigamente se utilizaba uma Tabela de número aleatórios
- Hoje em dia qualquer programa calcula números (pseudo) aleatorios

[1] Existem amostras aleatórias com e sem reposição

Amostragem aleatória simples

- No *R*:

```
sample(x, n)
```

em que x é um vetor com o ID dos elementos da população e n é o tamano da amostra.

Amostragem aleatória simples

- No *R*:

```
sample(x, n)
```

em que x é um vetor com o ID dos elementos da população e n é o tamano da amostra.

Amostragem aleatória simples

- No *R*:

```
sample(x, n)
```

em que x é um vetor com o ID dos elementos da população e n é o tamano da amostra.

Exemplo

```
IDs <- 1:1000
n <- 10
sample(IDs,n)
```

```
##  [1] 561 799 501 521 223 836  52  75 479 310
```

Amostragem aleatória simples

Quantas amostras aleatórias simples de tamanho n podem ser selecionadas de uma população cm N elementos?

Amostragem aleatória simples

Quantas amostras aleatórias simples de tamanho n podem ser selecionadas de uma população cm N elementos?

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Amostragem aleatória simples

A diretoria do CCJE gostaria conhecer a opinião dos alunos da FACC sobre o ensino remoto no 2020.2. Por motivos logísticos e financeiros, saber a opinião de todos os alunos é inviável. Por esse motivo, a diretoria do CCJE pede ajuda aos alunos de MAD211 para selecionar uma amostra de 400 alunos. Como seria feita a amostragem?

Amostragem aleatória simples

A diretoria do CCJE gostaria conhecer a opinião dos alunos da FACC sobre o ensino remoto no 2020.2. Por motivos logísticos e financeiros, saber a opinião de todos os alunos é inviável. Por esse motivo, a diretoria do CCJE pede ajuda aos alunos de MAD211 para selecionar uma amostra de 400 alunos. Como seria feita a amostragem?

- Usar os ID dos alunos (por exemplo, o número de matricula)

Amostragem aleatória simples

A diretoria do CCJE gostaria conhecer a opinião dos alunos da FACC sobre o ensino remoto no 2020.2. Por motivos logísticos e financeiros, saber a opinião de todos os alunos é inviável. Por esse motivo, a diretoria do CCJE pede ajuda aos alunos de MAD211 para selecionar uma amostra de 400 alunos. Como seria feita a amostragem?

- Usar os ID dos alunos (por exemplo, o número de matricula)
- Usar `sample(matriculas_alunos, n = 400)`

Amostragem aleatória simples

A diretoria do CCJE gostaria conhecer a opinião dos alunos da FACC sobre o ensino remoto no 2020.2. Por motivos logísticos e financeiros, saber a opinião de todos os alunos é inviável. Por esse motivo, a diretoria do CCJE pede ajuda aos alunos de MAD211 para selecionar uma amostra de 400 alunos. Como seria feita a amostragem?

- Usar os ID dos alunos (por exemplo, o número de matricula)
- Usar `sample(matriculas_alunos, n = 400)`
- Entrevistar os 400 alunos selecionados.

Estimação pontual

Estimação pontual

- Frequentemente estamos interessados em conhecer o valor de algumas caracteristicas (parâmetros) da população

Estimação pontual

- Frequentemente estamos interessados em conhecer o valor de algumas caracteristicas (parâmetros) da população
- Como dificilmente temos informação da população toda, o que é feito é calcular a caracteristoca correspondente à amostra, denominada **estatística amostral**.

Estimação pontual

- Frequentemente estamos interessados em conhecer o valor de algumas caracteristicas (parâmetros) da população
- Como dificilmente temos informação da população toda, o que é feito é calcular a caracteristoca correspondente à amostra, denominada **estatística amostral**.

Estimação pontual

- Frequentemente estamos interessados em conhecer o valor de algumas caracteristicas (parâmetros) da população
- Como dificilmente temos informação da população toda, o que é feito é calcular a caracteristoca correspondente à amostra, denominada **estatística amostral**.

Estatística

Uma estatística é uma característica da amostra, ou seja, uma estatística T é uma função de $X_1, X_2, \ldots, X_n$

Estimação pontual

- Frequentemente estamos interessados em conhecer o valor de algumas caracteristicas (parâmetros) da população
- Como dificilmente temos informação da população toda, o que é feito é calcular a caracteristoca correspondente à amostra, denominada **estatística amostral**.

Estatística

Uma estatística é uma característica da amostra, ou seja, uma estatística T é uma função de $X_1, X_2, \dots, X_n$

Parâmetro

Um parâmetro é uma medida usada para descrever uma caracaterística da população

Estimação pontual

Na prática, estimaremos a caracteristica de interesse (parâmetro) utilizando dados da nossa amostra.

Exemplos

Estimação pontual

Na prática, estimaremos a caracteristica de interesse (parâmetro) utilizando dados da nossa amostra.

Exemplos

- Saber a opinião dos alunos da FACC sobre o ensino remoto no 2020.2

Estimação pontual

Na prática, estimaremos a caracteristica de interesse (parâmetro) utilizando dados da nossa amostra.

Exemplos

- Saber a opinião dos alunos da FACC sobre o ensino remoto no 2020.2
- Saber o salário de todos os professores universitários de instituições publicas no Brasil

Estimação pontual

Na prática, estimaremos a caracteristica de interesse (parâmetro) utilizando dados da nossa amostra.

Exemplos

- Saber a opinião dos alunos da FACC sobre o ensino remoto no 2020.2
- Saber o salário de todos os professores universitários de instituições publicas no Brasil
- Saber a intenção de voto de todos os brasileiros (com idade para votar)

Estimação pontual

Exemplo

Suponha que os salários dos 10000 professores das universidades publicas está no conjunto de dados `salarios`

Estimação pontual

Exemplo

Suponha que os salários dos 10000 professores das universidades publicas está no conjunto de dados `salarios`

Cuja média é 7500.39 e variância é 1545.78

Estimação pontual

Exemplo

Suponha que os salários dos 10000 professores das universidades publicas está no conjunto de dados `salarios`

Cuja média é 7500.39 e variância é 1545.78

Vamos supor que o sistema tem organizado os professores segundo salário (de menor a maior)

Estimação pontual

Exemplo

Suponha que os salários dos 10000 professores das universidades publicas está no conjunto de dados `salarios`

Cuja média é 7500.39 e variância é 1545.78

Vamos supor que o sistema tem organizado os professores segundo salário (de menor a maior)

```
salarios <- sort(salarios)
```

Estimação pontual

Exemplo

Suponha que os salários dos 10000 professores das universidades publicas está no conjunto de dados `salarios`

Cuja média é 7500.39 e variância é 1545.78

Vamos supor que o sistema tem organizado os professores segundo salário (de menor a maior)

```
salarios <- sort(salarios)
```

vamos a selecionar uma amostra de tamanho 100 e calcular o salário médio e a variância

Estimação pontual

```
amostra1 <- head(salarios,100) #100 primeiros registros na base
amostra2 <- tail(salarios,100) #100 últimos registros na base
amostra3 <- sample(salarios,100) # a.a de tamanho 100
```

Estimação pontual

```r
amostra1 <- head(salarios,100) #100 primeiros registros na base
amostra2 <- tail(salarios,100) #100 últimos registros na base
amostra3 <- sample(salarios,100) # a.a de tamanho 100
```

Qual amostra você acha nos dara "boas" estimativas? por quê?

Estimação pontual

```r
amostra1 <- head(salarios,100) #100 primeiros registros na base
amostra2 <- tail(salarios,100) #100 últimos registros na base
amostra3 <- sample(salarios,100) # a.a de tamanho 100
```

Qual amostra você acha nos dara "boas" estimativas? por quê?

$\mu = 7500.39$ e $\sigma^2 = 1545.78$

```r
c(mean(amostra1), mean(amostra2), mean(amostra3))
```

```
## [1] 7396.095 7603.633 7494.107
```

```r
c(var(amostra1), var(amostra2), var(amostra3))
```

```
## [1]  128.5797  188.2172 1764.6905
```

Estimação pontual

E se quisermos saber a proporção de professores que ganham mais de 7500 reais?

```
sum(salarios > 7500)/length(salarios) #prop. populacional
```

```
## [1] 0.5007
```

Estimação pontual

E se quisermos saber a proporção de professores que ganham mais de 7500 reais?

```
sum(salarios > 7500)/length(salarios) #prop. populacional
```

```
## [1] 0.5007
```

```
sum(amostra1 > 7500)/length(amostra1)
```

```
## [1] 0
```

```
sum(amostra2 > 7500)/length(amostra2)
```

```
## [1] 1
```

```
sum(amostra3 > 7500)/length(amostra3)
```

```
## [1] 0.46
```

Estimação pontual

- A média amostral é um estimador da média populacional μ

Estimação pontual

- A média amostral é um estimador da média populacional μ
- A variância amostral é um estimador da variância populacional σ^2

Estimação pontual

- A média amostral é um estimador da média populacional μ
- A variância amostral é um estimador da variância populacional σ^2
- A proporção da amostra é um estimador da proporção populacional p

Distribuições amostrais

Distribuições amostrais

- No exemplo anterior, temos que $\mu = 7500.39$ e (para a amostra3) $\bar{x} = 7494.11$ mas. . . .

Distribuições amostrais

- No exemplo anterior, temos que $\mu = 7500.39$ e (para a amostra3) $\bar{x} = 7494.11$ mas. . . .
- E se tivessemos escolhido outra amostra?

Distribuições amostrais

- No exemplo anterior, temos que $\mu = 7500.39$ e (para a amostra3) $\bar{x} = 7494.11$ mas. . . .
- E se tivessemos escolhido outra amostra?

Distribuições amostrais

- No exemplo anterior, temos que $\mu = 7500.39$ e (para a amostra3) $\bar{x} = 7494.11$ mas. . . .
- E se tivessemos escolhido outra amostra?

```
c(mean(sample(salarios,100)), mean(sample(salarios,100)),
  mean(sample(salarios,100)), mean(sample(salarios,100)))
```

```
## [1] 7496.898 7493.770 7500.751 7491.826
```

Distribuições amostrais

- No exemplo anterior, temos que $\mu = 7500.39$ e (para a amostra3) $\bar{x} = 7494.11$ mas. . . .
- E se tivessemos escolhido outra amostra?

```
c(mean(sample(salarios,100)), mean(sample(salarios,100)),
  mean(sample(salarios,100)), mean(sample(salarios,100)))
```

```
## [1] 7496.898 7493.770 7500.751 7491.826
```

- Cada amostra levará a valores diferentes de $\bar{x}$

Distribuições amostrais

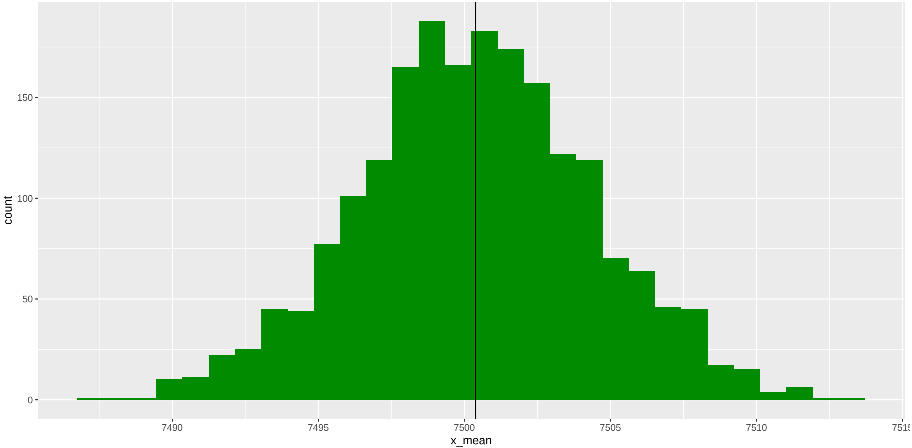
- No exemplo anterior, temos que $\mu = 7500.39$ e (para a amostra3) $\bar{x} = 7494.11$ mas. . . .
- E se tivessemos escolhido outra amostra?

```
c(mean(sample(salarios,100)), mean(sample(salarios,100)),
  mean(sample(salarios,100)), mean(sample(salarios,100)))
```

```
## [1] 7496.898 7493.770 7500.751 7491.826
```

- Cada amostra levará a valores diferentes de $\bar{x}$
- Se considerarmos, digamos 2000 amostras, qual é a distribuição amostral de $\bar{x}$?

Distribuições amostrais



Distribuições amostrais

- A estimador $\bar{X} = \frac{\sum_{1}^{n} X_i}{n}$ é uma variável aleatória, e como variável aleatória tem um valor médio (valor esperado), um desvio padrão e uma distribuição de probabilidade.

Distribuições amostrais

- A estimador $\bar{X} = \frac{\sum_{1}^{n} X_i}{n}$ é uma variável aleatória, e como variável aleatória tem um valor médio (valor esperado), um desvio padrão e uma distribuição de probabilidade.
- A distribuição de probabilidade da média amostral é chamada de **distribuição amostral** da média.

Distribuições amostrais

- A estimador $\bar{X} = \frac{\sum_{1}^{n} X_i}{n}$ é uma variável aleatória, e como variável aleatória tem um valor médio (valor esperado), um desvio padrão e uma distribuição de probabilidade.
- A distribuição de probabilidade da média amostral é chamada de **distribuição amostral** da média.
- Conhecer a distribuição amostral de alguma **estatística** (média, proporão, variância, etc), bem como suas propriedades, nos possibilitará fazer afirmações a respeito de quão próximas de, por exemplo, quão próximas a média da amostra está da média populacional (ou a variância amostral da variância populacional ou a proporção amostral da proporção populacional,etc)

Distribuição da média amostral

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição com média μ e variância σ^2

Distribuição da média amostral

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição com média μ e variância σ^2

- $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\Big) = \frac{1}{n}\underbrace{\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)}_{\mathbb{E}(X_1)+\cdots+\mathbb{E}(X_n)} = \frac{1}{n} n\mu = \mu$

Distribuição da média amostral

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição com média μ e variância σ^2

- $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\Big) = \frac{1}{n}\underbrace{\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)}_{\mathbb{E}(X_1)+\cdots+\mathbb{E}(X_n)} = \frac{1}{n} n\mu = \mu$
- Quando o valor esperado de um estimador pontual é igual ao parâmetro, dizemos que o estimador é não viesado.

Distribuição da média amostral

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição com média μ e variância σ^2

- $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \underbrace{\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)}_{\mathbb{E}(X_1)+\cdots+\mathbb{E}(X_n)} = \frac{1}{n} n\mu = \mu$
- Quando o valor esperado de um estimador pontual é igual ao parâmetro, dizemos que o estimador é não viesado.
- A média amostral é um estimador não viesado da média populacional.

Distribuição da média amostral

Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição com média μ e variância σ^2

- $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\Big(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\Big) = \frac{1}{n}\underbrace{\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)}_{\mathbb{E}(X_1)+\cdots+\mathbb{E}(X_n)} = \frac{1}{n}n\mu = \mu$
- Quando o valor esperado de um estimador pontual é igual ao parâmetro, dizemos que o estimador é não viesado.
- A média amostral é um estimador não viesado da média populacional.
- $\mathbb{V}(\bar{X}) = \mathbb{V}\Big(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\Big) = \frac{1}{n^2}\underbrace{\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n)}_{\mathbb{V}(X_1)+\cdots+\mathbb{V}(X_n)} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$

Distribuição da média amostral

- No exemplo dos salários, vimos que a distribuição da média amostral tinha a forma de uma distribuição normal.

Distribuição da média amostral

- No exemplo dos salários, vimos que a distribuição da média amostral tinha a forma de uma distribuição normal.
- Será que isso é uma coincidência?

Distribuição da média amostral

- No exemplo dos salários, vimos que a distribuição da média amostral tinha a forma de uma distribuição normal.
- Será que isso é uma coincidência?

Distribuição da média amostral

- No exemplo dos salários, vimos que a distribuição da média amostral tinha a forma de uma distribuição normal.
- Será que isso é uma coincidência?

Resultado

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma)$, então

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$$

Distribuição da média amostral

Teorema Central do Limite

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (para n grande) v.as **independentes** e **identicamente distribuidas** com $E(X_1) = \mu$ e $V(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Então,

$$\frac{(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \sim_{aprox} N(0,1) \quad \equiv \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim_{aprox} N(0,1)$$

Distribuição da média amostral

Teorema Central do Limite

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (para n grande) v.as **independentes** e **identicamente distribuidas** com $E(X_1) = \mu$ e $V(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Então,

$$\frac{(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \sim_{aprox} N(0,1) \quad \equiv \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim_{aprox} N(0,1)$$

Vamos ver o TCL (Teorema Central do Limite) através de simulações?

Distribuição da média amostral

Por que precisamos da distribuição da média amostral?

- Quando calculamos $\bar{x}$ não podemos esperar que esse valor seja exatamente igual a μ

Distribuição da média amostral

Por que precisamos da distribuição da média amostral?

- Quando calculamos $\bar{x}$ não podemos esperar que esse valor seja exatamente igual a μ
- Mas conhecer a distribuição da média amostral nos fornece informações probabilisticas da diferença entre a média amostral e a média da população.

Distribuição da média amostral

1. Seja X o número ligações semanais de telemarketing recebidas por clientes de uma operadores de celular (X tem média de 7 e desvio padrão de 3). Os clientes, cansados de receberem tantas ligações, resolvem processar a empresa. A empresa nega este fato mas aceita escolher uma amostra de 100 pessoas e se, em média, o número de ligações semanais for maior do que 9, eles darão aos clientes uma indenização pelos transtornos. Qual é a probabilidade de, em média, os 100 usuários receberem mais do que 9 ligações semanais?

Distribuição da média amostral

1. Seja X o número ligações semanais de telemarketing recebidas por clientes de uma operadores de celular (X tem média de 7 e desvio padrão de 3). Os clientes, cansados de receberem tantas ligações, resolvem processar a empresa. A empresa nega este fato mas aceita escolher uma amostra de 100 pessoas e se, em média, o número de ligações semanais for maior do que 9, eles darão aos clientes uma indenização pelos transtornos. Qual é a probabilidade de, em média, os 100 usuários receberem mais do que 9 ligações semanais?

- X tem $\mu = 7$ e $\sigma = 3$

Distribuição da média amostral

1. Seja X o número ligações semanais de telemarketing recebidas por clientes de uma operadores de celular (X tem média de 7 e desvio padrão de 3). Os clientes, cansados de receberem tantas ligações, resolvem processar a empresa. A empresa nega este fato mas aceita escolher uma amostra de 100 pessoas e se, em média, o número de ligações semanais for maior do que 9, eles darão aos clientes uma indenização pelos transtornos. Qual é a probabilidade de, em média, os 100 usuários receberem mais do que 9 ligações semanais?

- X tem $\mu = 7$ e $\sigma = 3$
- Pelo TCL

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{100}} =\sim N(0,1)$$

Distribuição da média amostral

1. Seja X o número ligações semanais de telemarketing recebidas por clientes de uma operadores de celular (X tem média de 7 e desvio padrão de 3). Os clientes, cansados de receberem tantas ligações, resolvem processar a empresa. A empresa nega este fato mas aceita escolher uma amostra de 100 pessoas e se, em média, o número de ligações semanais for maior do que 9, eles darão aos clientes uma indenização pelos transtornos. Qual é a probabilidade de, em média, os 100 usuários receberem mais do que 9 ligações semanais?

- X tem $\mu = 7$ e $\sigma = 3$
- Pelo TCL
$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{100}} =\sim N(0,1)$$
- Queremos: $P(\bar{X} > 9)$

Distribuição da média amostral

temos que: X tem $\mu = 7$ e $\sigma = 3$ e $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{100}} =\sim N(0,1)$

Distribuição da média amostral

temos que: X tem $\mu = 7$ e $\sigma = 3$ e $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{100}} =\sim N(0,1)$

$$P(\bar{X} > 9) = P(\bar{X} - 7 > 9 - 7) = P(\underbrace{\frac{\bar{X} - 7}{3/\sqrt{100}}}_{\sim N(0,1)} > \underbrace{\frac{9 - 7}{3/\sqrt{100}}}_{6.666667})$$

Distribuição da média amostral

temos que: X tem $\mu = 7$ e $\sigma = 3$ e $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{100}} =\sim N(0,1)$

$$P(\bar{X} > 9) = P(\bar{X} - 7 > 9 - 7) = P(\underbrace{\frac{\bar{X} - 7}{3/\sqrt{100}}}_{\sim N(0,1)} > \underbrace{\frac{9-7}{3/\sqrt{100}}}_{6.666667})$$

$$P(Z > 6.666667) = 1 - P(Z \leq 6.666667)$$

Distribuição da média amostral

temos que: X tem $\mu = 7$ e $\sigma = 3$ e $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{100}} =\sim N(0,1)$

$$P(\bar{X} > 9) = P(\bar{X} - 7 > 9 - 7) = P(\underbrace{\frac{\bar{X} - 7}{3/\sqrt{100}}}_{\sim N(0,1)} > \underbrace{\frac{9-7}{3/\sqrt{100}}}_{6.666667})$$

$P(Z > 6.666667) = 1 - P(Z \leq 6.666667)$

```
1-pnorm(6.666667)
```

```
## [1] 1.308387e-11
```

Distribuição da média amostral

2. Suponha que uma moeda honesta é lançada 900 vezes. Qual a probabilidade de obter mais de 495 caras?

Distribuição da média amostral

2. Suponha que uma moeda honesta é lançada 900 vezes. Qual a probabilidade de obter mais de 495 caras?

- X_i : lado superior da moeda no i-ésimo lançamento (1: cara, 0:coroa)

Distribuição da média amostral

2. Suponha que uma moeda honesta é lançada 900 vezes. Qual a probabilidade de obter mais de 495 caras?

- X_i : lado superior da moeda no i-ésimo lançamento (1: cara, 0:coroa)
- $X_i \sim bernoulli(p = 0.5)$

Distribuição da média amostral

2. Suponha que uma moeda honesta é lançada 900 vezes. Qual a probabilidade de obter mais de 495 caras?

- X_i : lado superior da moeda no i-ésimo lançamento (1: cara, 0:coroa)
- $X_i \sim bernoulli(p = 0.5)$
- $E(X_1) = p = 0.5$

Distribuição da média amostral

2. Suponha que uma moeda honesta é lançada 900 vezes. Qual a probabilidade de obter mais de 495 caras?

- X_i : lado superior da moeda no i-ésimo lançamento (1: cara, 0:coroa)
- $X_i \sim bernoulli(p = 0.5)$
- $E(X_1) = p = 0.5$
- $V(X_1) = pq = 0.25$

Distribuição da média amostral

2. Suponha que uma moeda honesta é lançada 900 vezes. Qual a probabilidade de obter mais de 495 caras?

- X_i : lado superior da moeda no i-ésimo lançamento (1: cara, 0:coroa)
- $X_i \sim bernoulli(p = 0.5)$
- $E(X_1) = p = 0.5$
- $V(X_1) = pq = 0.25$
- TCL: $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim_{aprox} N(0, 1)$

Distribuição da média amostral

2. Suponha que uma moeda honesta é lançada 900 vezes. Qual a probabilidade de obter mais de 495 caras?

- X_i : lado superior da moeda no i-ésimo lançamento (1: cara, 0:coroa)
- $X_i \sim bernoulli(p = 0.5)$
- $E(X_1) = p = 0.5$
- $V(X_1) = pq = 0.25$
- TCL: $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim_{aprox} N(0, 1)$
- $P(\sum_{i=1}^{n} X_i > 495) = P(\underbrace{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 900 \times 0.5}{\sqrt{0.25} \times \sqrt{900}}}_{Z} > \underbrace{\dfrac{495 - 900 \times 0.5}{\sqrt{0.25} \times \sqrt{900}}}_{3})$

Distribuição da média amostral

```r
1-pnorm(3)
```

```
## [1] 0.001349898
```

Distribuição da média amostral

```r
1-pnorm(3)
```

```
## [1] 0.001349898
```

Mas poderiamos também ter obtido a resposta utilizando diretamente a distribuição binomial ($Y \sim Binom(n = 900, p = 0.5)$)

Distribuição da média amostral

```
1-pnorm(3)
```

```
## [1] 0.001349898
```

Mas poderiamos também ter obtido a resposta utilizando diretamente a distribuição binomial ($Y \sim Binom(n = 900, p = 0.5)$)

$P(Y > 495) = 1 - P(Y \leq 495)$

Distribuição da média amostral

```r
1-pnorm(3)
```

```
## [1] 0.001349898
```

Mas poderiamos também ter obtido a resposta utilizando diretamente a distribuição binomial ($Y \sim Binom(n = 900, p = 0.5)$)

$P(Y > 495) = 1 - P(Y \leq 495)$

```r
1-pbinom(495, 900, prob = 0.5)
```

```
## [1] 0.001200108
```

Distribuição da média amostral

```
1-pnorm(3)
```

```
## [1] 0.001349898
```

Mas poderiamos também ter obtido a resposta utilizando diretamente a distribuição binomial ($Y \sim Binom(n = 900, p = 0.5)$)

$P(Y > 495) = 1 - P(Y \leq 495)$

```
1-pbinom(495, 900, prob = 0.5)
```

```
## [1] 0.001200108
```

A diferença nas respostas é devido a que o TCL é uma aproximação

Distribuição da média amostral

3. Uma amostra aleatório de tamanho $n = 120$ é extraida de uma distribuição uniforme no intevalo [0,1] ($U_{[0,1]}$). Qual é a probabilidade de que $P(|\bar{X} - 1/2| \leq 0.1)$?

Distribuição da média amostral

3. Uma amostra aleatório de tamanho $n = 120$ é extraida de uma distribuição uniforme no intevalo [0,1] ($U_{[0,1]}$). Qual é a probabilidade de que $P(|\bar{X} - 1/2| \leq 0.1)$?

- A média da distribuição $U_{[a,b]}$ é $\dfrac{a+b}{2}$, no nosso caso: $\dfrac{0+1}{2} = 1/2$

Distribuição da média amostral

3. Uma amostra aleatório de tamanho $n = 120$ é extraida de uma distribuição uniforme no intevalo [0,1] ($U_{[0,1]}$). Qual é a probabilidade de que $P(|\bar{X} - 1/2| \leq 0.1)$?

- A média da distribuição $U_{[a,b]}$ é $\dfrac{a+b}{2}$, no nosso caso: $\dfrac{0+1}{2} = 1/2$
- A variáncia da distribuição $U_{[a,b]}$ é $\dfrac{(b-a)^2}{12}$, no nosso caso: $1/12$

Distribuição da média amostral

3. Uma amostra aleatório de tamanho $n = 120$ é extraida de uma distribuição uniforme no intevalo [0,1] ($U_{[0,1]}$). Qual é a probabilidade de que $P(|\bar{X} - 1/2| \leq 0.1)$?

- A média da distribuição $U_{[a,b]}$ é $\dfrac{a+b}{2}$, no nosso caso: $\dfrac{0+1}{2} = 1/2$
- A variáncia da distribuição $U_{[a,b]}$ é $\dfrac{(b-a)^2}{12}$, no nosso caso: $1/12$
- Aplicando o TCL:

$$\frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{120}(\bar{X} - 1/2)}{1/12} \sim_{approx} N(0,1)$$

Distribuição da média amostral

3. Uma amostra aleatório de tamanho $n = 120$ é extraida de uma distribuição uniforme no intevalo [0,1] ($U_{[0,1]}$). Qual é a probabilidade de que $P(|\bar{X} - 1/2| \leq 0.1)$?

- A média da distribuição $U_{[a,b]}$ é $\frac{a+b}{2}$, no nosso caso: $\frac{0+1}{2} = 1/2$
- A variáncia da distribuição $U_{[a,b]}$ é $\frac{(b-a)^2}{12}$, no nosso caso: $1/12$
- Aplicando o TCL:

$$\frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{120}(\bar{X} - 1/2)}{1/12} \sim_{approx} N(0,1)$$

- Queremos: $P(|\bar{X} - 1/2| \leq 0.1)$

Distribuição da média amostral

$$\frac{\sqrt{120}(\bar{X} - 1/2)}{1/12} \sim_{approx} N(0,1)$$

Distribuição da média amostral

$$\frac{\sqrt{120}(\bar{X} - 1/2)}{1/12} \sim_{approx} N(0, 1)$$

- $P(|\bar{X} - 1/2| \leq 0.1) = P(-0.1 \leq \bar{X} - 1/2 \leq 0.1)$

Distribuição da média amostral

$$\frac{\sqrt{120}(\bar{X} - 1/2)}{1/12} \sim_{approx} N(0, 1)$$

- $P(|\bar{X} - 1/2| \leq 0.1) = P(-0.1 \leq \bar{X} - 1/2 \leq 0.1)$
- $P(|\bar{X} - 1/2| \leq 0.1) = P(\frac{-0.1}{1/12} \leq \frac{\bar{X} - 1/2}{1/12} \leq \frac{0.1}{1/12})$

Distribuição da média amostral

$$\frac{\sqrt{120}(\bar{X} - 1/2)}{1/12} \sim_{approx} N(0,1)$$

- $P(|\bar{X} - 1/2| \leq 0.1) = P(-0.1 \leq \bar{X} - 1/2 \leq 0.1)$
- $P(|\bar{X} - 1/2| \leq 0.1) = P(\frac{-0.1}{1/12} \leq \frac{\bar{X} - 1/2}{1/12} \leq \frac{0.1}{1/12})$
- $P(|\bar{X} - 1/2| \leq 0.1) = P(\underbrace{\sqrt{120}\frac{-0.1}{1/12}}_{-13.14534} \leq \underbrace{\sqrt{120}\frac{\bar{X} - 1/2}{1/12}}_{Z} \leq \underbrace{\sqrt{120}\frac{0.1}{1/12}}_{13.14534})$

Distribuição da média amostral

$$\frac{\sqrt{120}(\bar{X} - 1/2)}{1/12} \sim_{approx} N(0,1)$$

- $P(|\bar{X} - 1/2| \leq 0.1) = P(-0.1 \leq \bar{X} - 1/2 \leq 0.1)$
- $P(|\bar{X} - 1/2| \leq 0.1) = P(\frac{-0.1}{1/12} \leq \frac{\bar{X} - 1/2}{1/12} \leq \frac{0.1}{1/12})$
- $P(|\bar{X} - 1/2| \leq 0.1) = P(\underbrace{\sqrt{120}\frac{-0.1}{1/12}}_{-13.14534} \leq \underbrace{\sqrt{120}\frac{\bar{X} - 1/2}{1/12}}_{Z} \leq \underbrace{\sqrt{120}\frac{0.1}{1/12}}_{13.14534})$

Distribuição da média amostral

$$\frac{\sqrt{120}(\bar{X} - 1/2)}{1/12} \sim_{approx} N(0,1)$$

- $P(|\bar{X} - 1/2| \leq 0.1) = P(-0.1 \leq \bar{X} - 1/2 \leq 0.1)$
- $P(|\bar{X} - 1/2| \leq 0.1) = P(\frac{-0.1}{1/12} \leq \frac{\bar{X} - 1/2}{1/12} \leq \frac{0.1}{1/12})$
- $P(|\bar{X} - 1/2| \leq 0.1) = P(\underbrace{\sqrt{120}\frac{-0.1}{1/12}}_{-13.14534} \leq \underbrace{\sqrt{120}\frac{\bar{X} - 1/2}{1/12}}_{Z} \leq \underbrace{\sqrt{120}\frac{0.1}{1/12}}_{13.14534})$

```r
pnorm(13.14534) - pnorm(-13.14534)
```

```
## [1] 1
```

Métodos de amostragem

Métodos de amostragem

- Até agora discutimos a amostragem aleatória simples e discutimos propriedades de $\bar{X}$ e $\bar{p}$ quandos se usa esta forma de amostragem.

Métodos de amostragem

- Até agora discutimos a amostragem aleatória simples e discutimos propriedades de $\bar{X}$ e $\bar{p}$ quandos se usa esta forma de amostragem.
- Contudo, não é o único método de amostragem

Métodos de amostragem

- Até agora discutimos a amostragem aleatória simples e discutimos propriedades de $\bar{X}$ e $\bar{p}$ quandos se usa esta forma de amostragem.
- Contudo, não é o único método de amostragem
- Discutiremos brevemente outros métodos de amostragem.

Métodos de amostragem

Amostragem estratificada

- Os elementos da população sñao divididos em grupos chamados de *estratos* de forma que cada elemento pertence unicamente a um estrato

Métodos de amostragem

Amostragem estratificada

- Os elementos da população sñao divididos em grupos chamados de *estratos* de forma que cada elemento pertence unicamente a um estrato
- Selecionamos uma amostra aleatoria de cada um dos estratos

Métodos de amostragem

Amostragem estratificada

- Os elementos da população sñao divididos em grupos chamados de *estratos* de forma que cada elemento pertence unicamente a um estrato
- Selecionamos uma amostra aleatoria de cada um dos estratos
- Quanto mais homogeneos os estratos, melhor a nossa amostra

Métodos de amostragem

Amostragem por conglomerados

- Dividimos a população em conglomerados (grupos) em que cada elementos pertence unicamente a um conglomerado.

Métodos de amostragem

Amostragem por conglomerados

- Dividimos a população em conglomerados (grupos) em que cada elementos pertence unicamente a um conglomerado.
- Seleccionamos uma amostra aleatoria dos conglomerados

Métodos de amostragem

Amostragem por conglomerados

- Dividimos a população em conglomerados (grupos) em que cada elementos pertence unicamente a um conglomerado.
- Seleccionamos uma amostra aleatoria dos conglomerados
- Todos os elementos contidos nos conglomerados selecionados formam parte da nossa amostra

Métodos de amostragem

Amostragem por conglomerados

- Dividimos a população em conglomerados (grupos) em que cada elementos pertence unicamente a um conglomerado.
- Seleccionamos uma amostra aleatoria dos conglomerados
- Todos os elementos contidos nos conglomerados selecionados formam parte da nossa amostra
- Quanto mais heterogeneo sejam os conglomerados, melhor a nossa amostra

Métodos de amostragem

Amostragem por conglomerados

- Dividimos a população em conglomerados (grupos) em que cada elementos pertence unicamente a um conglomerado.
- Seleccionamos uma amostra aleatoria dos conglomerados
- Todos os elementos contidos nos conglomerados selecionados formam parte da nossa amostra
- Quanto mais heterogeneo sejam os conglomerados, melhor a nossa amostra
- Ex. amostrar quarteirões

Métodos de amostragem

Amostragem sistemática

- Muitas vezes, selecionar uma amostra aleatória simples pode não ser viavel ou consumir muito tempo

Métodos de amostragem

Amostragem sistemática

- Muitas vezes, selecionar uma amostra aleatória simples pode não ser viavel ou consumir muito tempo
- Ex: clientes de uma determinada loja fisica

Métodos de amostragem

Amostragem sistemática

- Muitas vezes, selecionar uma amostra aleatória simples pode não ser viavel ou consumir muito tempo
- Ex: clientes de uma determinada loja fisica
- Uma alternativa é utilizar amostragem sistemática

Métodos de amostragem

Amostragem sistemática

- Muitas vezes, selecionar uma amostra aleatória simples pode não ser viavel ou consumir muito tempo
- Ex: clientes de uma determinada loja fisica
- Uma alternativa é utilizar amostragem sistemática
- Consiste em amostrar elementos a cada k elementos

Métodos de amostragem

Amostragem sistemática

- Muitas vezes, selecionar uma amostra aleatória simples pode não ser viavel ou consumir muito tempo
- Ex: clientes de uma determinada loja fisica
- Uma alternativa é utilizar amostragem sistemática
- Consiste em amostrar elementos a cada k elementos
- Ex: amostrar o primeiro cliente que entra na loja, o cliente $1+k$, $1+2k$, $\ldots 1+nk$ até completarnos nossa amostra.

Métodos de amostragem

Amostragem sistemática

- Muitas vezes, selecionar uma amostra aleatória simples pode não ser viavel ou consumir muito tempo
- Ex: clientes de uma determinada loja fisica
- Uma alternativa é utilizar amostragem sistemática
- Consiste em amostrar elementos a cada k elementos
- Ex: amostrar o primeiro cliente que entra na loja, o cliente $1+k$, $1+2k$, $\ldots 1+nk$ até completarnos nossa amostra.
- Se tivermos o tamanho total de populção N e quisermos uma amostra de tamanho n, escolhemos elemento de $k = N/n$ em k. Ex: k, $2k$, $\ldots nk$

Métodos de amostragem

Amostragem por conveniência

- Amostragem não-probabilistica

Métodos de amostragem

Amostragem por conveniência

- Amostragem não-probabilistica
- A amostra é identificada por conveniência

Métodos de amostragem

Amostragem por conveniência

- Amostragem não-probabilistica
- A amostra é identificada por conveniência
- Ex: ao se fazer uma pesquisa na universidade, podemos selecionar estudantes voluntários (simplesmente por eles estarem disponíveis)

Métodos de amostragem

Amostragem por conveniência

- Amostragem não-probabilistica
- A amostra é identificada por conveniência
- Ex: ao se fazer uma pesquisa na universidade, podemos selecionar estudantes voluntários (simplesmente por eles estarem disponíveis)

Métodos de amostragem

Amostragem por conveniência

- Amostragem não-probabilistica
- A amostra é identificada por conveniência
- Ex: ao se fazer uma pesquisa na universidade, podemos selecionar estudantes voluntários (simplesmente por eles estarem disponíveis)

Amostragem de julganento

- Amostragem não-probabilistica

Métodos de amostragem

Amostragem por conveniência

- Amostragem não-probabilistica
- A amostra é identificada por conveniência
- Ex: ao se fazer uma pesquisa na universidade, podemos selecionar estudantes voluntários (simplesmente por eles estarem disponíveis)

Amostragem de julganento

- Amostragem não-probabilistica
- A pessoa que conhece profundamente o tema do estudo escolhe os elemento que julga seram mais importates da população

Métodos de amostragem

Amostragem por conveniência

- Amostragem não-probabilistica
- A amostra é identificada por conveniência
- Ex: ao se fazer uma pesquisa na universidade, podemos selecionar estudantes voluntários (simplesmente por eles estarem disponíveis)

Amostragem de julganento

- Amostragem não-probabilistica
- A pessoa que conhece profundamente o tema do estudo escolhe os elemento que julga seram mais importates da população
- Ex: um reporter escolher alguns deputados para darem sua opinião sobre algum fato.

Leituras recomendadas

- Anderson, D. R; Sweeney, D. J.; e Williams, T. A. (2008). *Estatística Aplicada à Administração e Economia*. 2ed. Cengage Learning. **Cap 7**
- Morettin, P.A; e Bussab, W. de O. (2004). *Estatística Básica*. 5ed, Saraiva. **Cap 10**