MAD211 - Estatística para Administração

Probabilidade Condicional

Prof. Carlos Trucíos
carlos.trucios@facc.ufrj.br
ctruciosm.github.io

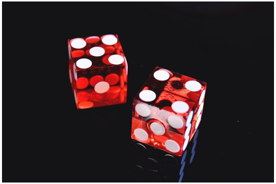
Faculdade de Administração e Ciências Contábeis,
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Aula 9

Motivação

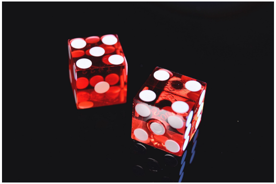
Motivação

Se lançarmos aleatoriamente dois dados, qual é a probabilidade de obtermos um 8?



Motivação

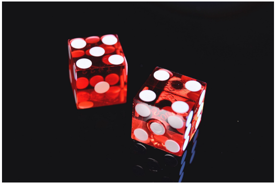
Se lançarmos aleatoriamente dois dados, qual é a probabilidade de obtermos um 8?



- $S = \{(i,j) : i,j = 1,\ldots,6\}$, $N = 36$

Motivação

Se lançarmos aleatoriamente dois dados, qual é a probabilidade de obtermos um 8?

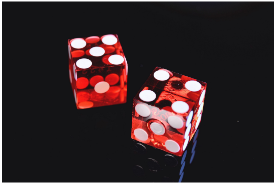


- $S = \{(i, j) : i, j = 1, \ldots, 6\}$, $N = 36$
- Seja o evento A : A soma da face superior em ambos os dados é 8, então $A = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{5}{36}$$

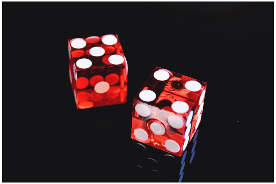
Motivação

Se soubermos que o primeiro dado é um 3, qual a probailidade de obter um 8?



Motivação

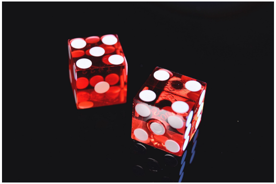
Se soubermos que o primeiro dado é um 3, qual a probailidade de obter um 8?



- $S = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$, $N = 6$

Motivação

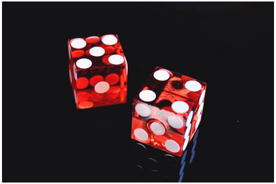
Se soubermos que o primeiro dado é um 3, qual a probailidade de obter um 8?



- $S = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$, $N = 6$
- B : A soma da face superior em ambos os dados é 8, então $B = \{(3,5)\}$

Motivação

Se soubermos que o primeiro dado é um 3, qual a probailidade de obter um 8?



- $S = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$, $N = 6$
- B : A soma da face superior em ambos os dados é 8, então $B = \{(3,5)\}$
- $$P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{1}{6}$$

Motivação

Frequentemente, a probabilidade de um evento é influenciada pelo fato de um evento relacionado já ter ocorrido ou não.

Motivação

Frequentemente, a probabilidade de um evento é influenciada pelo fato de um evento relacionado já ter ocorrido ou não.

Por exemplo, sejam A e B dois eventos tais que:

- A : A soma da face superior em ambos os dados é 8,
- B : A face do primeiro dado é 3.

Motivação

Frequentemente, a probabilidade de um evento é influenciada pelo fato de um evento relacionado já ter ocorrido ou não.

Por exemplo, sejam A e B dois eventos tais que:

- A : A soma da face superior em ambos os dados é 8,
- B : A face do primeiro dado é 3.

Queremos a probabilidade de A acontecer, dado que B acontece.
Denotamos esta probabilidade por,

$$P(A|B) \quad \text{(leia-se probabilidade de A dado B)}$$

Motivação

Frequentemente, a probabilidade de um evento é influenciada pelo fato de um evento relacionado já ter ocorrido ou não.

Por exemplo, sejam A e B dois eventos tais que:

- A : A soma da face superior em ambos os dados é 8,
- B : A face do primeiro dado é 3.

Queremos a probabilidade de A acontecer, dado que B acontece. Denotamos esta probabilidade por,

$$P(A|B) \quad \text{(leia-se probabilidade de A dado B)}$$

Nosso conhecimento sobre A é atualizado dado nosso conhecimento sobre B.

Probabilidade Condicional: Definição

Probabilidade Condicional: Definição

Probabilidade Condicional

Sejam $A, B \subset S$, com $P(B) > 0$. Então a probabilidade condicional do evento A *dado* o evento B é dado por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

se $P(B) = 0$, $P(A|B) = P(A)$[1]

[1] Se $P(B) = 0$, alguns livros definem $P(A|B) = 0$

Probabilidade Condicional: Definição

Probabilidade Condicional

Sejam $A, B \subset S$, com $P(B) > 0$. Então a probabilidade condicional do evento A *dado* o evento B é dado por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

se $P(B) = 0$, $P(A|B) = P(A)$[1]

Intuição: A ocorrencia do evento B modifica o probabilidade de A acontecer (pois teremos em S apenas os casos onde B acontece).

[1] Se $P(B) = 0$, alguns livros definem $P(A|B) = 0$

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

Prova para $P(B) > 0$ (se $P(B) = 0$, a prova é trivial)

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

Prova para $P(B) > 0$ (se $P(B) = 0$, a prova é trivial)

- $P(A|B) = \dfrac{\overbrace{P(A \cap B)}^{\geq 0}}{\underbrace{P(B)}_{>0}} \geq 0$

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

Prova para $P(B) > 0$ (se $P(B) = 0$, a prova é trivial)

- $P(A|B) = \dfrac{\overbrace{P(A \cap B)}^{\geq 0}}{\underbrace{P(B)}_{>0}} \geq 0$
- $P(S|B) = \dfrac{P(SB)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

Prova para $P(B) > 0$ (se $P(B) = 0$, a prova é trivial)

- $P(A|B) = \dfrac{\overbrace{P(A \cap B)}^{\geq 0}}{\underbrace{P(B)}_{>0}} \geq 0$
- $P(S|B) = \dfrac{P(SB)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$
- $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \dfrac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_iB)}{P(B)} = \dfrac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_iB))}{P(B)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_iB)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

Prova para $P(B) > 0$ (se $P(B) = 0$, a prova é trivial)

- $P(A|B) = \dfrac{\overbrace{P(A \cap B)}^{\geq 0}}{\underbrace{P(B)}_{>0}} \geq 0$
- $P(S|B) = \dfrac{P(SB)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$
- $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \dfrac{P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_iB)}{P(B)} = \dfrac{P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_iB))}{P(B)} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_iB)}{P(B)} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

Prova para $P(B) > 0$ (se $P(B) = 0$, a prova é trivial)

- $P(A|B) = \dfrac{\overbrace{P(A \cap B)}^{\geq 0}}{\underbrace{P(B)}_{>0}} \geq 0$
- $P(S|B) = \dfrac{P(SB)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$
- $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \dfrac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i B)}{P(B)} = \dfrac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i B))}{P(B)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$

Probabilidade condicional satisfaz os 3 axiomas de Kolmogorov.

Exemplos

Suponha que, de todos os individuos que compram um celular pela internet:

- 60% incluem uma capinha protetora no carrinho de compras,
- 40% incluem um fone de ouvido e
- 30% incluem ambos (capinha e fone).

Se selecionarmos um individuo (que comprou celular) aleatoriamente

a. Qual é a probabilidade do individuo ter comprado um fone de ouvido se soubermos que comprou uma capinha?
b. Qual é a probabilidade do individuo ter comprado uma capinha se soubermos que comprou um fone de ouvido?

Exemplos

Temos que: 60% incluem uma capinha, 40% incluem um fone e 30% incluem ambos.

Exemplos

Temos que: 60% incluem uma capinha, 40% incluem um fone e 30% incluem ambos.

Sejam os eventos:

- A : comprar fone
- B : comprar capinha

Exemplos

Temos que: 60% incluem uma capinha, 40% incluem um fone e 30% incluem ambos.

Sejam os eventos:

- A : comprar fone
- B : comprar capinha

a. Queremos $P(A|B)$,

Exemplos

Temos que: 60% incluem uma capinha, 40% incluem um fone e 30% incluem ambos.

Sejam os eventos:

- A : comprar fone
- B : comprar capinha

a. Queremos $P(A|B)$,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.6} = 1/2$$

Exemplos

Temos que: 60% incluem uma capinha, 40% incluem um fone e 30% incluem ambos.

Sejam os eventos:

- A : comprar fone
- B : comprar capinha

a. Queremos $P(A|B)$,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.6} = 1/2$$

b. De forma analoga, $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$

Exemplos

Uma urna tem 1 carta azul e 4 cartas vermelhas. João extrai duas cartas aleatoriamente (sem reposição). Qual é a probabilidade da segunda carta ser vermelha se, a primeira carta foi vermelha?

Exemplos

Uma urna tem 1 carta azul e 4 cartas vermelhas. João extrai duas cartas aleatoriamente (sem reposição). Qual é a probabilidade da segunda carta ser vermelha se, a primeira carta foi vermelha?

- Seja A : extrair uma carta vermelha na primeira extração, $P(A) = \frac{4}{5}$

Exemplos

Uma urna tem 1 carta azul e 4 cartas vermelhas. João extrai duas cartas aleatoriamente (sem reposição). Qual é a probabilidade da segunda carta ser vermelha se, a primeira carta foi vermelha?

- Seja A : extrair uma carta vermelha na primeira extração, $P(A) = \frac{4}{5}$
- Seja B : extrair uma carta vermelha na segunda extração

Exemplos

Uma urna tem 1 carta azul e 4 cartas vermelhas. João extrai duas cartas aleatoriamente (sem reposição). Qual é a probabilidade da segunda carta ser vermelha se, a primeira carta foi vermelha?

- Seja A : extrair uma carta vermelha na primeira extração, $P(A) = \dfrac{4}{5}$
- Seja B : extrair uma carta vermelha na segunda extração
- De forma intuitiva: $P(B|A) = \dfrac{3}{4}$

Exemplos

Uma urna tem 1 carta azul e 4 cartas vermelhas. João extrai duas cartas aleatoriamente (sem reposição). Qual é a probabilidade da segunda carta ser vermelha se, a primeira carta foi vermelha?

- Seja A : extrair uma carta vermelha na primeira extração, $P(A) = \frac{4}{5}$
- Seja B : extrair uma carta vermelha na segunda extração
- De forma intuitiva: $P(B|A) = \frac{3}{4}$
- Usando a definição:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4 \times 3}{5 \times 4}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Propriedades

Probabilidade condicional satisfaz os axiomas de Kolmogorov (i.e. é Probabilidade). Consequentemente, todas as propriedades validas para probabilidade são também validas para Probabilidade Condicional.

- $0 \leq P(A|B) \leq 1$

Propriedades

Probabilidade condicional satisfaz os axiomas de Kolmogorov (i.e. é Probabilidade). Consequentemente, todas as propriedades validas para probabilidade são também validas para Probabilidade Condicional.

- $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$

Propriedades

Probabilidade condicional satisfaz os axiomas de Kolmogorov (i.e. é Probabilidade). Consequentemente, todas as propriedades validas para probabilidade são também validas para Probabilidade Condicional.

- $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$
- $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$

Propriedades

Probabilidade condicional satisfaz os axiomas de Kolmogorov (i.e. é Probabilidade). Consequentemente, todas as propriedades validas para probabilidade são também validas para Probabilidade Condicional.

- $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$
- $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$
- $\ldots$

Regra da Multiplicação

Regra da Multiplicação

Muitas vezes estamos interessados em probabilidades do tipo $P(A \cap B)$. Se tivermos $P(A)$ e $P(B|A)$, a probabilidade desejada é facilmente obtida.

Regra da Multiplicação

Muitas vezes estamos interessados em probabilidades do tipo $P(A \cap B)$. Se tivermos $P(A)$ e $P(B|A)$, a probabilidade desejada é facilmente obtida.

Teorema 1: Regra da Multiplicação.

Regra da Multiplicação

Muitas vezes estamos interessados em probabilidades do tipo $P(A \cap B)$. Se tivermos $P(A)$ e $P(B|A)$, a probabilidade desejada é facilmente obtida.

Teorema 1: Regra da Multiplicação.

- (a) Sejam os eventos A e B. Então

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Regra da Multiplicação

Muitas vezes estamos interessados em probabilidades do tipo $P(A \cap B)$. Se tivermos $P(A)$ e $P(B|A)$, a probabilidade desejada é facilmente obtida.

Teorema 1: Regra da Multiplicação.

- (a) Sejam os eventos A e B. Então

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Regra da Multiplicação

Muitas vezes estamos interessados em probabilidades do tipo $P(A \cap B)$. Se tivermos $P(A)$ e $P(B|A)$, a probabilidade desejada é facilmente obtida.

Teorema 1: Regra da Multiplicação.

- (a) Sejam os eventos A e B. Então

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

- (b) Sejam os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Então

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1)\ldots P(A_n|A_{n-1}\ldots A_1)$$

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

- Para 2 eventos é valida (parte a)

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

- Para 2 eventos é valida (parte a)
- Supomos que vale para n,

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

- Para 2 eventos é valida (parte a)
- Supomos que vale para n,

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

- Para 2 eventos é valida (parte a)
- Supomos que vale para n,
$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_n|A_{n-1}\dots A_1)$$

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

- Para 2 eventos é valida (parte a)
- Supomos que vale para n,
$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_{n-1}\ldots A_1)$$
- Vamos provar para $n+1$,

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

- Para 2 eventos é valida (parte a)
- Supomos que vale para n,
$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \ldots P(A_n|A_{n-1} \ldots A_1)$$
- Vamos provar para $n+1$,

Regra da Multiplicação: Prova

(a) Decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

- Para 2 eventos é valida (parte a)
- Supomos que vale para n,
  $$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_{n-1}\ldots A_1)$$
- Vamos provar para $n+1$,

$$P(\underbrace{A_1\ldots A_n}_{A}\underbrace{A_{n+1}}_{B}) = P(\underbrace{A_{n+1}}_{B}\,|\,\underbrace{A_1\ldots A_n}_{A})P(\underbrace{A_1\ldots A_n}_{A})$$
$$= P(A_{n+1}|A_n\ldots A_1)P(A_n|A_{n-1}\ldots A_1)\ldots P(A_1)$$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No Hemocentro de RJ precisam de sangue tipo O+. Quatro individuos (que não conhecem seu tipo sanguineo mas sabem que um deles tem o tipo de sangue desejado), resolvem doar sangue. Se os doadores são selecionado aleatoriamente, qual é a probabilidade de que pelos menos três individuos tenham que ser testador para a obtencão do tipo de sangue desejado?

Regra da Multiplicação: Exemplo

No Hemocentro de RJ precisam de sangue tipo O+. Quatro individuos (que não conhecem seu tipo sanguineo mas sabem que um deles tem o tipo de sangue desejado), resolvem doar sangue. Se os doadores são selecionado aleatoriamente, qual é a probabilidade de que pelos menos três individuos tenham que ser testador para a obtencão do tipo de sangue desejado?

- Sejam os eventos A_i : o i-ésimo individuo não é O+.

Regra da Multiplicação: Exemplo

No Hemocentro de RJ precisam de sangue tipo O+. Quatro individuos (que não conhecem seu tipo sanguineo mas sabem que um deles tem o tipo de sangue desejado), resolvem doar sangue. Se os doadores são selecionado aleatoriamente, qual é a probabilidade de que pelos menos três individuos tenham que ser testador para a obtencão do tipo de sangue desejado?

- Sejam os eventos A_i : o i-ésimo individuo não é O+.
- $P(A_1) = \dfrac{3}{4}$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No Hemocentro de RJ precisam de sangue tipo O+. Quatro individuos (que não conhecem seu tipo sanguineo mas sabem que um deles tem o tipo de sangue desejado), resolvem doar sangue. Se os doadores são selecionado aleatoriamente, qual é a probabilidade de que pelos menos três individuos tenham que ser testador para a obtencão do tipo de sangue desejado?

- Sejam os eventos A_i : o i-ésimo individuo não é O+.
- $P(A_1) = \dfrac{3}{4}$
- $P(A_2|A_1) = \dfrac{2}{3}$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No Hemocentro de RJ precisam de sangue tipo O+. Quatro individuos (que não conhecem seu tipo sanguineo mas sabem que um deles tem o tipo de sangue desejado), resolvem doar sangue. Se os doadores são selecionado aleatoriamente, qual é a probabilidade de que pelos menos três individuos tenham que ser testador para a obtencão do tipo de sangue desejado?

- Sejam os eventos A_i : o i-ésimo individuo não é O+.
- $P(A_1) = \frac{3}{4}$
- $P(A_2|A_1) = \frac{2}{3}$
- $P(\text{Testar pelo menos 3 individuos}) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = 0.5$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No exemplo anterior. Qual é a probabilidade do Terceiro ser O+?

- Seja o evento B : O terceiro individuo é O$+$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No exemplo anterior. Qual é a probabilidade do Terceiro ser O+?

- Seja o evento B : O terceiro individuo é O+
-

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A_2 \cap A_1) \\ &= P(B|A_2 \cap A_1)P(A_2|A_1)P(A_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No exemplo anterior. Qual é a probabilidade do Terceiro ser O+?

- Seja o evento B : O terceiro individuo é O+
-

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(B \cap A_2 \cap A_1) \\
&= P(B|A_2 \cap A_1)P(A_2|A_1)P(A_1) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No exemplo anterior. Qual é a probabilidade do Terceiro ser O+?

- Seja o evento B : O terceiro individuo é O+
-

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A_2 \cap A_1) \\ &= P(B|A_2 \cap A_1)P(A_2|A_1)P(A_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Dica

Quando o experimento consistir em uma sequência de diversas etapas, pode ser útil apresentarlo em um diagrama de árvore.

Regra da Multiplicação: Exemplo

Em uma urna temos 10 bolas: 3 vermelhas e 7 azuis. Se extrairmos 2 bolas aleatoriamente e sem reposição, qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração e uma bola vermelha na primeira extração?

Regra da Multiplicação: Exemplo

Em uma urna temos 10 bolas: 3 vermelhas e 7 azuis. Se extrairmos 2 bolas aleatoriamente e sem reposição, qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração e uma bola vermelha na primeira extração?

- Sejam os eventos A_i : a i-ésima extração é vermelha

Regra da Multiplicação: Exemplo

Em uma urna temos 10 bolas: 3 vermelhas e 7 azuis. Se extrairmos 2 bolas aleatoriamente e sem reposição, qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração e uma bola vermelha na primeira extração?

- Sejam os eventos A_i : a i-ésima extração é vermelha
- $P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1)P(A_2^c|A_1)$

Regra da Multiplicação: Exemplo

Em uma urna temos 10 bolas: 3 vermelhas e 7 azuis. Se extrairmos 2 bolas aleatoriamente e sem reposição, qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração e uma bola vermelha na primeira extração?

- Sejam os eventos A_i : a i-ésima extração é vermelha
- $P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1)P(A_2^c|A_1)$
- $P(A_1) = \frac{3}{10} = 0.3$

Regra da Multiplicação: Exemplo

Em uma urna temos 10 bolas: 3 vermelhas e 7 azuis. Se extrairmos 2 bolas aleatoriamente e sem reposição, qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração e uma bola vermelha na primeira extração?

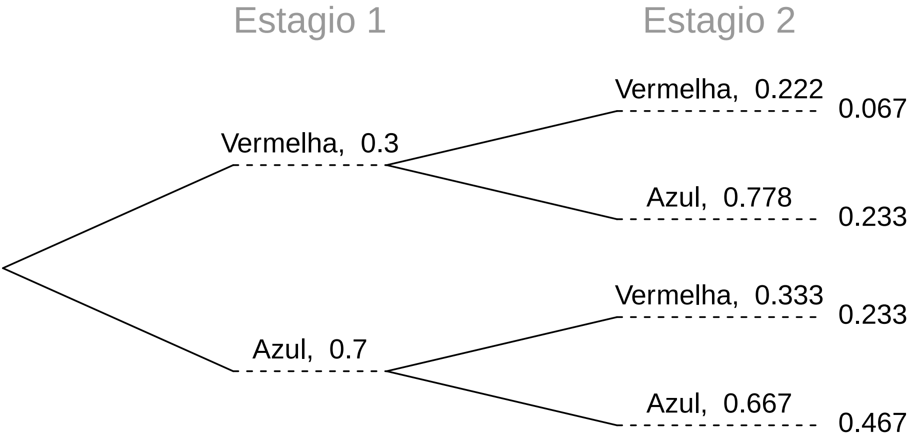
- Sejam os eventos A_i : a i-ésima extração é vermelha
- $P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1)P(A_2^c|A_1)$
- $P(A_1) = \dfrac{3}{10} = 0.3$
- $P(A_2^c|A_1) = \dfrac{7}{9} = 0.778$

Regra da Multiplicação: Exemplo

Em uma urna temos 10 bolas: 3 vermelhas e 7 azuis. Se extrairmos 2 bolas aleatoriamente e sem reposição, qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração e uma bola vermelha na primeira extração?

- Sejam os eventos A_i : a i-ésima extração é vermelha
- $P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1)P(A_2^c|A_1)$
- $P(A_1) = \dfrac{3}{10} = 0.3$
- $P(A_2^c|A_1) = \dfrac{7}{9} = 0.778$
- $P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1)P(A_2^c|A_1) = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{7}{9} = 0.233$

Regra da Multiplicação: Exemplo



Teorema da Probabilidade Total

Teorema da Probabilidade Total

Teorema 2: Teorema da Probabilidade Total

Sejam os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que formam uma partição[2] de S. Então, para quaquer evento B,

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + \ldots + P(B|A_n) = \sum_{i}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

[2]Os eventos formam uma partição se são disjuntos ($A_i \cap A_j = \varnothing$) e exaustivos ($\bigcup^{n} A_i = S$) simultaneamente.

Teorema da Probabilidade Total

Teorema 2: Teorema da Probabilidade Total

Sejam os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que formam uma partição[2] de S. Então, para quaquer evento B,

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + \ldots + P(B|A_n) = \sum_{i}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

[2] Os eventos formam uma partição se são disjuntos ($A_i \cap A_j = \varnothing$) e exaustivos ($\bigcup^{n} A_i = S$) simultaneamente.

Teorema da Probabilidade Total

Sejam os eventos $C_1, \ldots, C_9$ que formam uma partição de S, e seja $A \subset S$.

Teorema da Probabilidade Total

Sejam os eventos $C_1, \ldots, C_9$ que formam uma partição de S, e seja $A \subset S$.

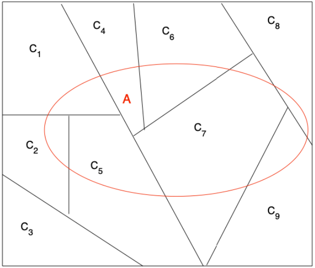


Figura 1: Source: An Introduction to the Science of Statistics (Joseph C. Watkins)

Teorema da Probabilidade Total

Sejam os eventos $C_1, \ldots, C_9$ que formam uma partição de S, e seja $A \subset S$.

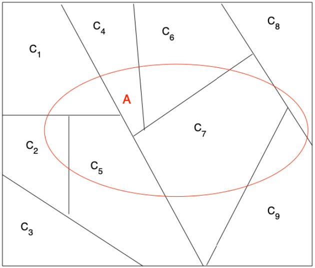


Figura 1: Source: An Introduction to the Science of Statistics (Joseph C. Watkins)

$$P(A) = \underbrace{P(A \cap C_1)}_{P(C_1)P(A/C_1)} + \underbrace{P(A \cap C_2)}_{P(C_2)P(A/C_2)} + \cdots + \underbrace{P(C_9)P(A \cap C_9)}_{P(C_9)P(A/C_9)}$$

Teorema da Probabilidade Total: Demonstração

- Os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma partição de S

Teorema da Probabilidade Total: Demonstração

- Os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma partição de S
- $B = \underbrace{(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots (B \cap A_n)}_{\textit{Disjuntos}}$

Teorema da Probabilidade Total: Demonstração

- Os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma partição de S
- $B = \underbrace{(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots (B \cap A_n)}_{Disjuntos}$
- (Pelo A3) $P(B) = P(\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$

Teorema da Probabilidade Total: Demonstração

- Os eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$ formam uma partição de S
- $B = \underbrace{(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots (B \cap A_n)}_{Disjuntos}$
- (Pelo A3) $P(B) = P(\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$
- (Pelo T1) $P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B|A_i)$

Teorema da Probabilidade Total: Demonstração

- Os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma partição de S
- $B = \underbrace{(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots (B \cap A_n)}_{Disjuntos}$
- (Pelo A3) $P(B) = P(\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$
- (Pelo T1) $P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B|A_i)$
- $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

Voltando ao exemplo anterior (tinhamos 3 bolas vermelhas e 7 azuis). Qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração?

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

Voltando ao exemplo anterior (tinhamos 3 bolas vermelhas e 7 azuis). Qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração?

Sejam os eventos:

- A_1 : a bola da primeira extração é vermelha

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

Voltando ao exemplo anterior (tinhamos 3 bolas vermelhas e 7 azuis). Qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração?

Sejam os eventos:

- A_1 : a bola da primeira extração é vermelha
- A_2 : a bola da primeira extração é Azul

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

Voltando ao exemplo anterior (tinhamos 3 bolas vermelhas e 7 azuis). Qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração?

Sejam os eventos:

- A_1 : a bola da primeira extração é vermelha
- A_2 : a bola da primeira extração é Azul
- B : a bola da segunda extração é azul

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

Voltando ao exemplo anterior (tinhamos 3 bolas vermelhas e 7 azuis). Qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração?

Sejam os eventos:

- A_1 : a bola da primeira extração é vermelha
- A_2 : a bola da primeira extração é Azul
- B : a bola da segunda extração é azul
- $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)$

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

Voltando ao exemplo anterior (tinhamos 3 bolas vermelhas e 7 azuis). Qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração?

Sejam os eventos:

- A_1 : a bola da primeira extração é vermelha
- A_2 : a bola da primeira extração é Azul
- B : a bola da segunda extração é azul
- $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)$

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

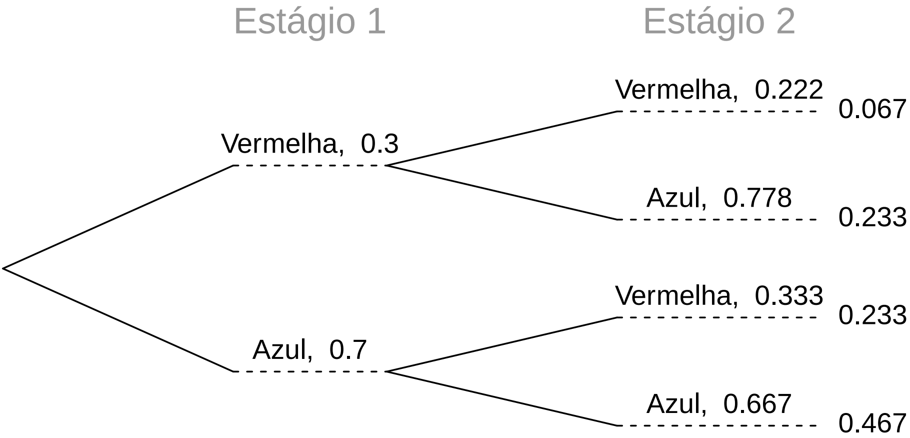
Voltando ao exemplo anterior (tinhamos 3 bolas vermelhas e 7 azuis). Qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração?

Sejam os eventos:

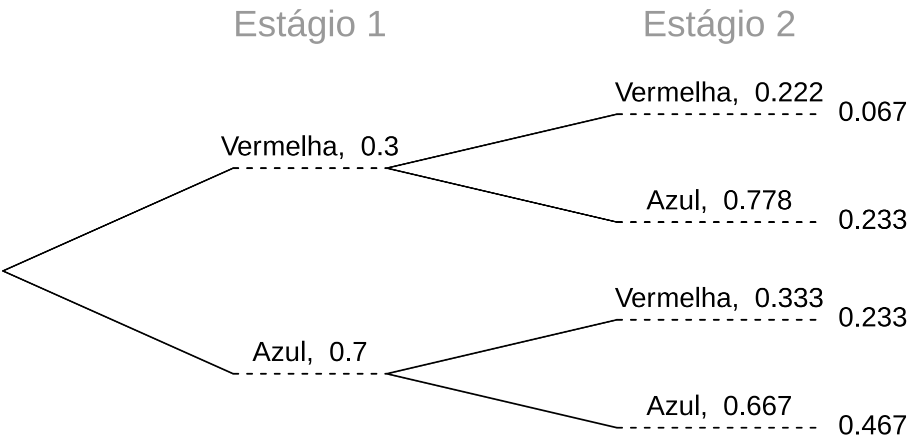
- A_1 : a bola da primeira extração é vermelha
- A_2 : a bola da primeira extração é Azul
- B : a bola da segunda extração é azul
- $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)$

$$P(B) = \underbrace{P(A_1)}_{3/10}\underbrace{P(B|A_1)}_{7/9} + \underbrace{P(A_2)}_{7/10}\underbrace{P(B|A_2)}_{6/9} = \frac{3}{10}\frac{7}{9} + \frac{7}{10}\frac{6}{9} = \frac{63}{90} = 0.7$$

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo



Teorema da Probabilidade Total: Exemplo



$$P(B) = 0.233 + 0.467 = 0.7$$

Teorema de Bayes

Teorema de Bayes

Teorema 3: Teorema de Bayes

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos que formam uma partição de S (i.e. são disjuntos e exaustivos) e seja B um evento qualquer com $P(B) > 0$. Então, $\forall i,\ i = 1, \ldots, n$.

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

Teorema de Bayes: Demonstração

- (Def): $P(A_i|B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$

Teorema de Bayes: Demonstração

- (Def): $P(A_i|B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$
- (T1): $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i)$

Teorema de Bayes: Demonstração

- (Def): $P(A_i|B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$
- (T1): $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i)$
- (T2): $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$

Teorema de Bayes: Demonstração

- (Def): $P(A_i|B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$
- (T1): $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i)$
- (T2): $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$
- Logo,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Teorema de Bayes: Exemplos

1. **Suponha que o primeiro lote das telas da Mi Band 6 (smartwatch) são produzidas por três maquinas diferentes (M_1, M_2 e M_3), sendo que 20% das telas são fabricadas pela M_1, 30% pela M_2 e 50% pela M_3. Suponha também que 1% das telas fabricadas pela M_1, 2% das fabricadas pela M_2 e 3% das telas fabricas pela M_3 vem com defeito. Se selecionarmos aleatoriamente uma tela desse lote e está com defeito, qual é a probabilidade da tela ter sido produzida pela M_2**

Teorema de Bayes: Exemplos

1. **Suponha que o primeiro lote das telas da Mi Band 6 (smartwatch) são produzidas por três maquinas diferentes (M_1, M_2 e M_3), sendo que 20% das telas são fabricadas pela M_1, 30% pela M_2 e 50% pela M_3. Suponha também que 1% das telas fabricadas pela M_1, 2% das fabricadas pela M_2 e 3% das telas fabricas pela M_3 vem com defeito. Se selecionarmos aleatoriamente uma tela desse lote e está com defeito, qual é a probabilidade da tela ter sido produzida pela M_2**

Sejam os eventos

- A_i: A tela foi produzida pela maquina M_i

Teorema de Bayes: Exemplos

1. **Suponha que o primeiro lote das telas da Mi Band 6 (smartwatch) são produzidas por três maquinas diferentes (M_1, M_2 e M_3), sendo que 20% das telas são fabricadas pela M_1, 30% pela M_2 e 50% pela M_3. Suponha também que 1% das telas fabricadas pela M_1, 2% das fabricadas pela M_2 e 3% das telas fabricas pela M_3 vem com defeito. Se selecionarmos aleatoriamente uma tela desse lote e está com defeito, qual é a probabilidade da tela ter sido produzida pela M_2**

Sejam os eventos

- A_i: A tela foi produzida pela maquina M_i
- B: A tela é defeituosa

Teorema de Bayes: Exemplos

1. **Suponha que o primeiro lote das telas da Mi Band 6 (smartwatch) são produzidas por três maquinas diferentes (M_1, M_2 e M_3), sendo que 20% das telas são fabricadas pela M_1, 30% pela M_2 e 50% pela M_3. Suponha também que 1% das telas fabricadas pela M_1, 2% das fabricadas pela M_2 e 3% das telas fabricas pela M_3 vem com defeito. Se selecionarmos aleatoriamente uma tela desse lote e está com defeito, qual é a probabilidade da tela ter sido produzida pela M_2**

Sejam os eventos

- A_i: A tela foi produzida pela maquina M_i
- B: A tela é defeituosa
- Queremos $P(A_2|B)$

Teorema de Bayes: Exemplos

20% das Telas são da M_1 (1% são defeituosas), 30% das Telas são da M_2 (2% são defeituosas) e 50% das Telas são da M_3 (3% são defeituosas).

Teorema de Bayes: Exemplos

20% das Telas são da M_1 (1% são defeituosas), 30% das Telas são da M_2 (2% são defeituosas) e 50% das Telas são da M_3 (3% são defeituosas).

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)}$$

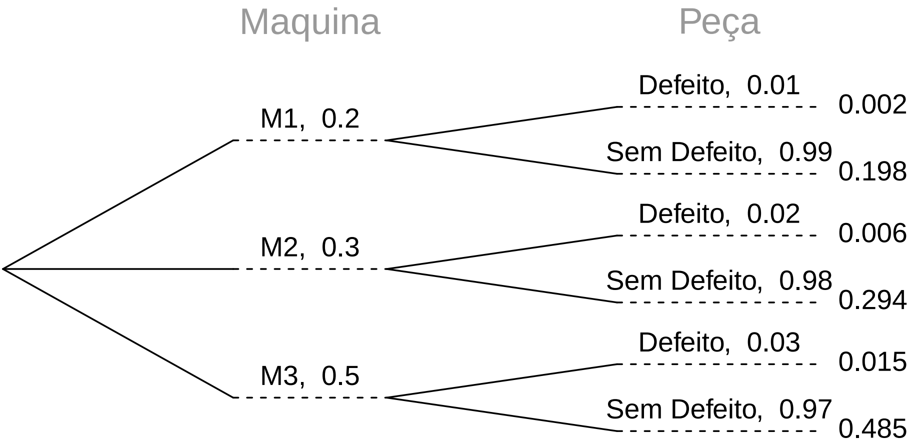
Teorema de Bayes: Exemplos

20% das Telas são da M_1 (1% são defeituosas), 30% das Telas são da M_2 (2% são defeituosas) e 50% das Telas são da M_3 (3% são defeituosas).

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)}$$

$$P(A_2|B) = \frac{0.3 \times 0.02}{0.2 \times 0.01 + 0.3 \times 0.02 + 0.5 \times 0.03} = 0.26$$

Teorema de Bayes: Exemplos



Independência

Independência

- Em geral, temos que $P(A|B) \neq P(A)$ (o conhecimento de B muda as chances de ocorrencia do evento A)

Independência

- Em geral, temos que $P(A|B) \neq P(A)$ (o conhecimento de B muda as chances de ocorrencia do evento A)
- Contudo, existe uma clase de eventos onde $P(A|B) = P(A)$, neste caso os eventos A e B são ditos independentes.

Independência

- Em geral, temos que $P(A|B) \neq P(A)$ (o conhecimento de B muda as chances de ocorrencia do evento A)
- Contudo, existe uma clase de eventos onde $P(A|B) = P(A)$, neste caso os eventos A e B são ditos independentes.

Independência

- Em geral, temos que $P(A|B) \neq P(A)$ (o conhecimento de B muda as chances de ocorrencia do evento A)
- Contudo, existe uma clase de eventos onde $P(A|B) = P(A)$, neste caso os eventos A e B são ditos independentes.

Definição: Indepêndencia

Os eventos A e B são independentes se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Se A e B não são independentes, são chamados de dependentes.

Independência

- Em geral, temos que $P(A|B) \neq P(A)$ (o conhecimento de B muda as chances de ocorrencia do evento A)
- Contudo, existe uma clase de eventos onde $P(A|B) = P(A)$, neste caso os eventos A e B são ditos independentes.

Definição: Indepêndencia

Os eventos A e B são independentes se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Se A e B não são independentes, são chamados de dependentes.

Teorema

Se $P(B) > 0$, uma condição necessária e suficiente para que os eventos A e B sejam independentes é $P(A|B) = P(A)$

Independência: Exemplo

Uma carta é selecionada aleatoriamente de um baralho de 52 cartas. Sejam os eventos

- A: a carta selecionada é um As
- B: a carta selecionada é do naipe de espadas.

A e B são independentes?

Independência: Exemplo

Uma carta é selecionada aleatoriamente de um baralho de 52 cartas. Sejam os eventos

- A: a carta selecionada é um As
- B: a carta selecionada é do naipe de espadas.

A e B são independentes? $P(AB) = P(A)P(B)$?

- $P(AB) = \frac{1}{52}$

Independência: Exemplo

Uma carta é selecionada aleatoriamente de um baralho de 52 cartas. Sejam os eventos

- A: a carta selecionada é um As
- B: a carta selecionada é do naipe de espadas.

A e B são independentes? $P(AB) = P(A)P(B)$?

- $P(AB) = \dfrac{1}{52}$
- $P(A) = \dfrac{4}{52}$, $P(B) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$

Independência: Exemplo

Uma carta é selecionada aleatoriamente de um baralho de 52 cartas. Sejam os eventos

- A: a carta selecionada é um As
- B: a carta selecionada é do naipe de espadas.

A e B são independentes? $P(AB) = P(A)P(B)$?

- $P(AB) = \frac{1}{52}$
- $P(A) = \frac{4}{52}$, $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
- $P(AB) = \frac{1}{52} = \frac{4}{52}\frac{1}{4} = P(A)P(B)$

Independência: Exemplo

Uma carta é selecionada aleatoriamente de um baralho de 52 cartas. Sejam os eventos

- A: a carta selecionada é um As
- B: a carta selecionada é do naipe de espadas.

A e B são independentes? $P(AB) = P(A)P(B)$?

- $P(AB) = \dfrac{1}{52}$
- $P(A) = \dfrac{4}{52}$, $P(B) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$
- $P(AB) = \dfrac{1}{52} = \dfrac{4}{52}\dfrac{1}{4} = P(A)P(B)$
- Logo, A e B são independentes.

Independência: Exemplo

Duas maquinas M_1 e M_2 funcionam independentemente. Sejam os eventos:

- A: M_1 falha durante o periodo de 8 horas
- B: M_2 falha durante o periodo de 8 horas.

Qual é a probabilidade que pelo menos uma das maquinhas falhe durante o periodo de 8 horas? (assuma que $P(A) = 1/3$ e $P(B) = 1/4$)

Independência: Exemplo

Duas maquinas M_1 e M_2 funcionam independentemente. Sejam os eventos:

- A: M_1 falha durante o periodo de 8 horas
- B: M_2 falha durante o periodo de 8 horas.

Qual é a probabilidade que pelo menos uma das maquinhas falhe durante o periodo de 8 horas? (assuma que $P(A) = 1/3$ e $P(B) = 1/4$)

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Independência: Exemplo

Duas maquinas M_1 e M_2 funcionam independentemente. Sejam os eventos:

- A: M_1 falha durante o periodo de 8 horas
- B: M_2 falha durante o periodo de 8 horas.

Qual é a probabilidade que pelo menos uma das maquinhas falhe durante o periodo de 8 horas? (assuma que $P(A) = 1/3$ e $P(B) = 1/4$)

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

Independência: Exemplo

Duas maquinas M_1 e M_2 funcionam independentemente. Sejam os eventos:

- A: M_1 falha durante o periodo de 8 horas
- B: M_2 falha durante o periodo de 8 horas.

Qual é a probabilidade que pelo menos uma das maquinhas falhe durante o periodo de 8 horas? (assuma que $P(A) = 1/3$ e $P(B) = 1/4$)

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$

Independência

Propriedades

Se A e B são independentes, então são também indepentes:

- A e B^c
- A^c e B
- A^c e B^c

Independência

Propriedades

Se A e B são independentes, então são também indepentes:

- A e B^c
- A^c e B
- A^c e B^c

Definição: Mutuamente independentes

Três eventos A, B e C são independentes se

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \text{ e}$$

- $P(AB) = P(A)P(B)$
- $P(BC) = P(B)P(C)$
- $P(AC) = P(A)P(C)$

Independência

Definição: Mutuamente independentes

Os eventos $A_1, \ldots, A_n$ são independentes (mutuamente independentes) se para cada $k = 2, \ldots n$ e cada subconjunto de indices $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$,

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) P(A_{i_k})$$

Cuidado!

Se $A \cap B = \varnothing$, não significa que A e B são independentes (são independentes se um deles tiver probabilidade zero.)

Leituras recomendadas

- Anderson, D. R; Sweeney, D. J.; e Williams, T. A. (2008). *Estatística Aplicada à Administração e Economia*. 2ed. Cengage Learning. **Cap 4.4–Cap 4.5**
- Morettin, P.A; e Bussab, W. de O. (2004). *Estatística Básica*. 5ed, Saraiva. **Cap 5.3–Cap 5.4**