MAD211 - Estatística para Administração

Introdução à Probabilidade

Prof. Carlos Trucíos
carlos.trucios@facc.ufrj.br
ctruciosm.github.io

Faculdade de Administração e Ciências Contábeis,
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Aula 8

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Definições básicas

Probabilidade

Propriedades

Revisitando os Axiomas

Espaço amostral com resultados equiprovaveis

Exemplos

Definições básicas

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

- Seja um experimento aleatório (E) um experimento cujo resultado não podemos prever com certeza.

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

- Seja um experimento aleatório (E) um experimento cujo resultado não podemos prever com certeza.
- Seja A um conjunto de possiveis resultados de E

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

- Seja um experimento aleatório (E) um experimento cujo resultado não podemos prever com certeza.
- Seja A um conjunto de possiveis resultados de E
- Seja S (ou Ω) o conjunto de todos os resultados possíveis de E.

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

- Seja um experimento aleatório (E) um experimento cujo resultado não podemos prever com certeza.
- Seja A um conjunto de possiveis resultados de E
- Seja S (ou Ω) o conjunto de todos os resultados possíveis de E.

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

- Seja um experimento aleatório (E) um experimento cujo resultado não podemos prever com certeza.
- Seja A um conjunto de possiveis resultados de E
- Seja S (ou Ω) o conjunto de todos os resultados possíveis de E.

Definição

O conjunto de todos os possíveis resultados de E, S, é chamado espaço amostral (do experimento E) e todo subconjunto $A \subset S$ será chamado de evento.

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- $S = \{Cara, Coroa\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- $S = \{Cara, Coroa\}$
- Seja o evento A: o resultado é Cara.

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- $S = \{Cara, Coroa\}$
- Seja o evento A: o resultado é Cara.
- $A = \{Cara\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- $S = \{Cara, Coroa\}$
- Seja o evento A: o resultado é Cara.
- $A = \{Cara\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- $S = \{Cara, Coroa\}$
- Seja o evento A: o resultado é Cara.
- $A = \{Cara\}$

2- Se o resultado de um experimento é a ordem em que 5 jogadores (camisa número 8,9,10,11,12) chutam os penalties, então

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- $S = \{Cara, Coroa\}$
- Seja o evento A: o resultado é Cara.
- $A = \{Cara\}$

2- Se o resultado de um experimento é a ordem em que 5 jogadores (camisa número 8,9,10,11,12) chutam os penalties, então

- $S = \{\text{todas as 5! permutações de } (8,9,10,11,12)\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- $S = \{Cara, Coroa\}$
- Seja o evento A: o resultado é Cara.
- $A = \{Cara\}$

2- Se o resultado de um experimento é a ordem em que 5 jogadores (camisa número 8,9,10,11,12) chutam os penalties, então

- $S = \{\text{todas as 5! permutações de } (8{,}9{,}10{,}11{,}12)\}$
- Seja o evento A: os últimos 2 chutes são dado pelos camisa 11 e 10 (nessa ordem)

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- $S = \{Cara, Coroa\}$
- Seja o evento A: o resultado é Cara.
- $A = \{Cara\}$

2- Se o resultado de um experimento é a ordem em que 5 jogadores (camisa número 8,9,10,11,12) chutam os penalties, então

- $S = \{$todas as 5! permutações de (8,9,10,11,12)$\}$
- Seja o evento A: os últimos 2 chutes são dado pelos camisa 11 e 10 (nessa ordem)
- $A = \{(a, b, c, 11, 10)$ onde a,b,c são as 3! permutações de (8,9,12)$\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Seja o evento A: a soma das faces é 7

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Seja o evento A: a soma das faces é 7
- $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Seja o evento A: a soma das faces é 7
- $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Seja o evento A: a soma das faces é 7
- $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

4- Se o experimento consiste em escolher ao acaso um ponto no circulo de raio 1 centrado na origem, então

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Seja o evento A: a soma das faces é 7
- $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

4- Se o experimento consiste em escolher ao acaso um ponto no circulo de raio 1 centrado na origem, então

- $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Seja o evento A: a soma das faces é 7
- $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

4- Se o experimento consiste em escolher ao acaso um ponto no circulo de raio 1 centrado na origem, então

- $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
- Seja o evento A: a distância entre o ponto e a origem é $\leq 1/3$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Seja o evento A: a soma das faces é 7
- $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

4- Se o experimento consiste em escolher ao acaso um ponto no circulo de raio 1 centrado na origem, então

- $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
- Seja o evento A: a distância entre o ponto e a origem é $\leq 1/3$
- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1/3\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

5- Se o experimento consiste em medir (em horas) o tempo de vida de um transistor, então

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

5- Se o experimento consiste em medir (em horas) o tempo de vida de um transistor, então

- $S = \{x \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq x \leq \infty\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

5- Se o experimento consiste em medir (em horas) o tempo de vida de um transistor, então

- $S = \{x \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq x \leq \infty\}$
- Seja o evento A: o transistor não funciona mais que 5 horas

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

5- Se o experimento consiste em medir (em horas) o tempo de vida de um transistor, então

- $S = \{x \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq x \leq \infty\}$
- Seja o evento A: o transistor não funciona mais que 5 horas
- $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq x \leq 5\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

Eventos

Um evento A é qualquer subconjunto de S ($A \subset S$). Um evento é dito **simples** se consistir exatamente de um único resultado e é dito **composto** se consistir em mais de um resultado

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

Eventos

Um evento A é qualquer subconjunto de S ($A \subset S$). Um evento é dito **simples** se consistir exatamente de um único resultado e é dito **composto** se consistir em mais de um resultado

6- Seja o experimento em que cada um de três carros que trafegam em uma estrada siga pela direita (D) ou pela esquerda (E) em uma bifurcação. Então, $S = \{EEE, DEE, EDE, EED, EDD, DED, DDE, DDD\}$. Sejam os eventos

- A: os 3 carros siguem pela direita
- B: um dos 3 carros vira à direita
- C: os 3 carros viram na mesma direção

Quais eventos são simples e quais compostos?

Teoria de conjuntos

Eventos são essencialmente conjuntos, assim, os resultados da teoria de conjuntos podem ser utilizados para estudar eventos. Três operações importantes (e que darão lugar a novos eventos gerados a partir dos eventos já conhecidos) são:

Complemento, União e Intersecção

Teoria de conjuntos

Eventos são essencialmente conjuntos, assim, os resultados da teoria de conjuntos podem ser utilizados para estudar eventos. Três operações importantes (e que darão lugar a novos eventos gerados a partir dos eventos já conhecidos) são:

Complemento, União e Intersecção

1. Seja o evento $A \subset S$, o **complemento** de A (A^c, $A^{'}$ ou $\bar{A}$), é o evento que consiste em todos os resultados em S que não estão contidos em A.

Teoria de conjuntos

Eventos são essencialmente conjuntos, assim, os resultados da teoria de conjuntos podem ser utilizados para estudar eventos. Três operações importantes (e que darão lugar a novos eventos gerados a partir dos eventos já conhecidos) são:

Complemento, União e Intersecção

1. Seja o evento $A \subset S$, o **complemento** de A (A^c, A' ou $\bar{A}$), é o evento que consiste em todos os resultados em S que não estão contidos em A.
2. Sejam A e B dois eventos, a **união** $A \cup B$ é o evento que consiste em todos os resultados que estão em A ou em B ou em ambos.

Teoria de conjuntos

Eventos são essencialmente conjuntos, assim, os resultados da teoria de conjuntos podem ser utilizados para estudar eventos. Três operações importantes (e que darão lugar a novos eventos gerados a partir dos eventos já conhecidos) são:

Complemento, União e Intersecção

1. Seja o evento $A \subset S$, o **complemento** de A (A^c, A' ou $\bar{A}$), é o evento que consiste em todos os resultados em S que não estão contidos em A.
2. Sejam A e B dois eventos, a **união** $A \cup B$ é o evento que consiste em todos os resultados que estão em A ou em B ou em ambos.
3. a **intersecção** $A \cap B$ (ou simplesmente AB) é o evento que consiste em todos os resultados que estão em A e também em B simultaneamente

Teoria de conjuntos

Lei		
Commutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Leis de DeMorgan

- $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$
- $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$

Teoria de conjuntos

Seja o experimento que consiste em jogar 2 dados, então
$S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Seja o evento A: o primeiro dado é impar

Teoria de conjuntos

Seja o experimento que consiste em jogar 2 dados, então $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Seja o evento A: o primeiro dado é impar
- Seja o evento B: o primeiro dado é par

Teoria de conjuntos

Seja o experimento que consiste em jogar 2 dados, então $S = \{(i,j) : i,j = 1,2,3,4,5,6\}$

- Seja o evento A: o primeiro dado é impar
- Seja o evento B: o primeiro dado é par
- $A \cap B$?, $A \cup B$?

Teoria de conjuntos

Seja o experimento que consiste em jogar 2 dados, então
$S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Seja o evento A: o primeiro dado é impar
- Seja o evento B: o primeiro dado é par
- $A \cap B$?, $A \cup B$?
- $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = S$

Teoria de conjuntos

Seja o experimento que consiste em jogar 2 dados, então
$S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Seja o evento A: o primeiro dado é impar
- Seja o evento B: o primeiro dado é par
- $A \cap B$?, $A \cup B$?
- $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = S$

Teoria de conjuntos

Seja o experimento que consiste em jogar 2 dados, então
$S = \{(i,j) : i,j = 1,2,3,4,5,6\}$

- Seja o evento A: o primeiro dado é impar
- Seja o evento B: o primeiro dado é par
- $A \cap B$?, $A \cup B$?
- $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = S$

Evento certo e evento impossível

S é o evento certo e $\varnothing$ é o evento nulo (ou impossível). Quando $A \cap B = \varnothing$, A e B são eventos mutuamente exclusivos (ou disjuntos)

Probabilidade

Definições

- Seja $A \subset S$ um evento quaisquer e S finito enumerável,

$$P(A) = \frac{\text{Número de elementos em A}}{\text{Número de elementos em S}}$$

(**definição clássica de probabilidade**)

Definições

- Seja $A \subset S$ um evento quaisquer e S finito enumerável,

$$P(A) = \frac{\text{Número de elementos em A}}{\text{Número de elementos em S}}$$

(**definição clássica de probabilidade**)

- se S não for enumerável,

$$P(A) = \frac{\text{Área de A}}{\text{Área de S}}$$

(**probabilidade geometrica**)

Definições

- Seja $A \subset S$ um evento quaisquer e S finito enumerável,

$$P(A) = \frac{\text{Número de elementos em A}}{\text{Número de elementos em S}}$$

  (**definição clássica de probabilidade**)
- se S não for enumerável,

$$P(A) = \frac{\text{Área de A}}{\text{Área de S}}$$

  (**probabilidade geometrica**)
- se S for infinito,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n},$$

  onde n_A é o número de ocorrências de A em n repetições independentes (**definição frequentista** ou **estatística**)

Definições

- Não vamos nos preocupar com o problema de como definir probabilidades para cada experimento.

Definições

- Não vamos nos preocupar com o problema de como definir probabilidades para cada experimento.
- As definições previamente apresentadas têm o apelo da intuição, contudo, não são suficientes para uma formulação rigorosa da probabilidade.

Definições

- Não vamos nos preocupar com o problema de como definir probabilidades para cada experimento.
- As definições previamente apresentadas têm o apelo da intuição, contudo, não são suficientes para uma formulação rigorosa da probabilidade.
- Kolmogorov apresentou um conjunto de axiomas para definir probabilidade, permitindo incluir as definições anteriores como casos particulares.

Axiomas

Axiomas de Kolmogorov

Seja um experimento cujo espaço amostral é S. Uma função P definida nos subconjuntos de S é uma probabilidade de satisfaz os seguintes axiomas:

- **(A1)** Seja $A \subset S$, $0 \leq P(A)$,
- **(A2)** $P(S) = 1$,
- **(A3)** Sejam $A_1, A_2, \ldots$ eventos **disjuntos** ($A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$),

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Axiomas

Axiomas de Kolmogorov

Seja um experimento cujo espaço amostral é S. Uma função P definida nos subconjuntos de S é uma probabilidade de satisfaz os seguintes axiomas:

- **(A1)** Seja $A \subset S$, $0 \leq P(A)$,
- **(A2)** $P(S) = 1$,
- **(A3)** Sejam $A_1, A_2, \ldots$ eventos **disjuntos** ($A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$),

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- Note que (A3) não se restringe ao caso de S ser finito

Propriedades

Propriedades

Propriedades

- **(P0)**: $0 \leq P(A) \leq 1$
- **(P1)**: $P(A^c) = 1 - P(A)$
- **(P2)**: $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$
- **(P3)**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- **(P4)**: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots +$
  $(-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$
- **(P5)**: Para quaisquer eventos $A_1, A_2, \ldots,$ $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Propriedades

Prova (P0)

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$

Propriedades

Prova (P0)

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- Pelo (A1), $P(A) \geq 0$

Propriedades

Prova (P0)

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- Pelo (A1), $P(A) \geq 0$
- Como A e A^c são disjuntos, pelo (A3) $P(S) = P(A) + P(A^c)$

Propriedades

Prova (P0)

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- Pelo (A1), $P(A) \geq 0$
- Como A e A^c são disjuntos, pelo (A3) $P(S) = P(A) + P(A^c)$
- $P(A) = P(S) - \underbrace{P(A^c)}_{\geq 0} \leq P(S) = 1$

Propriedades

Prova (P1)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$

Propriedades

Prova (P1)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- Pelo (A2), temos que $P(S) = 1$

Propriedades

Prova (P1)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- Pelo (A2), temos que $P(S) = 1$
- Como A e A^c são disjuntos, pelo (A3), $P(\underbrace{A \cup A^c}_{S}) = P(A) + P(A^c)$

Propriedades

Prova (P1)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- Pelo (A2), temos que $P(S) = 1$
- Como A e A^c são disjuntos, pelo (A3), $P(\underbrace{A \cup A^c}_{S}) = P(A) + P(A^c)$
- $\underbrace{P(S)}_{1} = P(A) + P(A^c)$

Propriedades

Prova (P1)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- Pelo (A2), temos que $P(S) = 1$
- Como A e A^c são disjuntos, pelo (A3), $P(\underbrace{A \cup A^c}_{S}) = P(A) + P(A^c)$
- $\underbrace{P(S)}_{1} = P(A) + P(A^c)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$

Propriedades

Prova (P2)

$$A \subset B, \text{ então } P(A) \leq P(B)$$

- Seja $A \subset B$

Propriedades

Prova (P2)

$$A \subset B, \text{ então } P(A) \leq P(B)$$

- Seja $A \subset B$
- $B = A \cup (A^c \cap B)$

Propriedades

Prova (P2)

$$A \subset B, \text{ então } P(A) \leq P(B)$$

- Seja $A \subset B$
- $B = A \cup (A^c \cap B)$
- $P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$

Propriedades

Prova (P2)

$$A \subset B, \text{ então } P(A) \leq P(B)$$

- Seja $A \subset B$
- $B = A \cup (A^c \cap B)$
- $P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$
- Pelo (A1), $P(A^c \cap B) \geq 0$

Propriedades

Prova (P2)

$$A \subset B, \text{ então } P(A) \leq P(B)$$

- Seja $A \subset B$
- $B = A \cup (A^c \cap B)$
- $P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$
- Pelo (A1), $P(A^c \cap B) \geq 0$
- Então, $P(A) \leq P(B)$

Propriedades

Prova (P3)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$

Propriedades

Prova (P3)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$

Propriedades

Prova (P3)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$
- Por outro lado: $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

Propriedades

Prova (P3)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$
- Por outro lado: $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$
- $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$

Propriedades

Prova (P3)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$
- Por outro lado: $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$
- $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$
- $P(B) - P(A \cap B) = \underbrace{P(A^c \cap B)}_{P(A \cup B) - P(A)}$

Propriedades

Prova (P3)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$
- Por outro lado: $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$
- $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$
- $P(B) - P(A \cap B) = \underbrace{P(A^c \cap B)}_{P(A \cup B) - P(A)}$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Propriedades

Prova (P4)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i_1<i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots + (-1)^{r+1} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}$$

Por indução ($n = 2$, supormos que funciona para n e provar para $n + 1$)

Propriedades

Prova (P5)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup \ldots$

Propriedades

Prova (P5)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup \dots$
- Pelo (A3), $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) + \dots$

Propriedades

Prova (P5)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup \ldots$
- Pelo (A3), $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) + \ldots$
- Note que, $A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{j-1}^c \cap A_j \subset A_j$

Propriedades

Prova (P5)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup \ldots$
- Pelo (A3), $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) + \ldots$
- Note que, $A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{j-1}^c \cap A_j \subset A_j$
- Pela (P3), $P(A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{j-1}^c \cap A_j) \leq P(A_j)$

Propriedades

Prova (P5)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup \ldots$
- Pelo (A3), $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) + \ldots$
- Note que, $A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{j-1}^c \cap A_j \subset A_j$
- Pela (P3), $P(A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{j-1}^c \cap A_j) \leq P(A_j)$
- $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) + \ldots \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Revisitando os Axiomas

Revisitando os Axiomas

Fora do horario de pico, um trem possui cinco vagões. Suponha que um passajeiro tem o dobro de probabilidade de pegar o vagão do meio (3) do que os adjacentes (2 ou 4) e por sua vez, pegar um dos vagões adjacentes tem o dobro de probabilidade de pegar um dos vagões extremos (1 ou 5). Qual é a probabilidade de pegar um dos vagões extremos? (pegar o vagão 1 ou 5 tem a mesma probabilidade)

- O passajeiro pode subir em apenas 1 vagão

Revisitando os Axiomas

Fora do horario de pico, um trem possui cinco vagões. Suponha que um passageiro tem o dobro de probabilidade de pegar o vagão do meio (3) do que os adjacentes (2 ou 4) e por sua vez, pegar um dos vagões adjacentes tem o dobro de probabilidade de pegar um dos vagões extremos (1 ou 5). Qual é a probabilidade de pegar um dos vagões extremos? (pegar o vagão 1 ou 5 tem a mesma probabilidade)

- O passageiro pode subir em apenas 1 vagão
- Sejam os eventos E_i: o passageiro pega o vagão i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)

Revisitando os Axiomas

Fora do horario de pico, um trem possui cinco vagões. Suponha que um passajeiro tem o dobro de probabilidade de pegar o vagão do meio (3) do que os adjacentes (2 ou 4) e por sua vez, pegar um dos vagões adjacentes tem o dobro de probabilidade de pegar um dos vagões extremos (1 ou 5). Qual é a probabilidade de pegar um dos vagões extremos? (pegar o vagão 1 ou 5 tem a mesma probabilidade)

- O passajeiro pode subir em apenas 1 vagão
- Sejam os eventos E_i: o passageiro pega o vagão i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)
- $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$

Revisitando os Axiomas

Fora do horario de pico, um trem possui cinco vagões. Suponha que um passajeiro tem o dobro de probabilidade de pegar o vagão do meio (3) do que os adjacentes (2 ou 4) e por sua vez, pegar um dos vagões adjacentes tem o dobro de probabilidade de pegar um dos vagões extremos (1 ou 5). Qual é a probabilidade de pegar um dos vagões extremos? (pegar o vagão 1 ou 5 tem a mesma probabilidade)

- O passajeiro pode subir em apenas 1 vagão
- Sejam os eventos E_i: o passageiro pega o vagão i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$
- $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$
- $P(E_3) = 2P(E_2), \quad \text{e} \quad P(E_3) = 2P(E_4)$

Revisitando os Axiomas

Fora do horario de pico, um trem possui cinco vagões. Suponha que um passajeiro tem o dobro de probabilidade de pegar o vagão do meio (3) do que os adjacentes (2 ou 4) e por sua vez, pegar um dos vagões adjacentes tem o dobro de probabilidade de pegar um dos vagões extremos (1 ou 5). Qual é a probabilidade de pegar um dos vagões extremos? (pegar o vagão 1 ou 5 tem a mesma probabilidade)

- O passajeiro pode subir em apenas 1 vagão
- Sejam os eventos E_i: o passageiro pega o vagão i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)
- $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$
- $P(E_3) = 2P(E_2)$, e $P(E_3) = 2P(E_4)$
- $P(E_2) = 2P(E_1)$, $P(E_2) = 2P(E_5)$

Revisitando os Axiomas

Fora do horario de pico, um trem possui cinco vagões. Suponha que um passajeiro tem o dobro de probabilidade de pegar o vagão do meio (3) do que os adjacentes (2 ou 4) e por sua vez, pegar um dos vagões adjacentes tem o dobro de probabilidade de pegar um dos vagões extremos (1 ou 5). Qual é a probabilidade de pegar um dos vagões extremos? (pegar o vagão 1 ou 5 tem a mesma probabilidade)

- O passajeiro pode subir em apenas 1 vagão
- Sejam os eventos E_i: o passageiro pega o vagão i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$
- $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$
- $P(E_3) = 2P(E_2)$, e $P(E_3) = 2P(E_4)$
- $P(E_2) = 2P(E_1)$, $P(E_2) = 2P(E_5)$
- $P(E_4) = 2P(E_1)$, $P(E_4) = 2P(E_5)$

Revisitando os Axiomas

Fora do horario de pico, um trem possui cinco vagões. Suponha que um passajeiro tem o dobro de probabilidade de pegar o vagão do meio (3) do que os adjacentes (2 ou 4) e por sua vez, pegar um dos vagões adjacentes tem o dobro de probabilidade de pegar um dos vagões extremos (1 ou 5). Qual é a probabilidade de pegar um dos vagões extremos? (pegar o vagão 1 ou 5 tem a mesma probabilidade)

- $P(\bigcup_{i=1}^{5} E_i) = \sum_{i=1}^{5} P(E_i) =$
  $P(E_1) + \underbrace{2P(E_1)}_{P(E_2)} + \underbrace{4P(E_1)}_{2P(E_2)} + \underbrace{2P(E_1)}_{P(E_4)} + \underbrace{P(E_1)}_{P(E_5)} = 1$

Revisitando os Axiomas

Fora do horario de pico, um trem possui cinco vagões. Suponha que um passajeiro tem o dobro de probabilidade de pegar o vagão do meio (3) do que os adjacentes (2 ou 4) e por sua vez, pegar um dos vagões adjacentes tem o dobro de probabilidade de pegar um dos vagões extremos (1 ou 5). Qual é a probabilidade de pegar um dos vagões extremos? (pegar o vagão 1 ou 5 tem a mesma probabilidade)

- $P(\bigcup_{i=1}^{5} E_i) = \sum_{i=1}^{5} P(E_i) =$ $P(E_1) + \underbrace{2P(E_1)}_{P(E_2)} + \underbrace{4P(E_1)}_{2P(E_2)} + \underbrace{2P(E_1)}_{P(E_4)} + \underbrace{P(E_1)}_{P(E_5)} = 1$
- $P(E_1) = 0.1 = P(E_5)$; $P(E_2) = P(E_4) = 0.2$; $P(E_3) = 0.4$

Revisitando os Axiomas

Fora do horario de pico, um trem possui cinco vagões. Suponha que um passajeiro tem o dobro de probabilidade de pegar o vagão do meio (3) do que os adjacentes (2 ou 4) e por sua vez, pegar um dos vagões adjacentes tem o dobro de probabilidade de pegar um dos vagões extremos (1 ou 5). Qual é a probabilidade de pegar um dos vagões extremos? (pegar o vagão 1 ou 5 tem a mesma probabilidade)

- $P(\bigcup_{i=1}^{5} E_i) = \sum_{i=1}^{5} P(E_i) =$
  $P(E_1) + \underbrace{2P(E_1)}_{P(E_2)} + \underbrace{4P(E_1)}_{2P(E_2)} + \underbrace{2P(E_1)}_{P(E_4)} + \underbrace{P(E_1)}_{P(E_5)} = 1$
- $P(E_1) = 0.1 = P(E_5)$; $P(E_2) = P(E_4) = 0.2$; $P(E_3) = 0.4$
- Probabilidade de pegar um dos vagões dos extremos é
  $P(E_1 \cup E_5) = P(E_1) + P(E_5) = 0.2$

Espaço amostral com resultados equiprovaveis

Espaço amostral com resultados equiprovaveis

Em experimentos que consistem de N resultados, é natural supor que todos os resultados em S sejam igualmente provaveis:

Espaço amostral com resultados equiprovaveis

Em experimentos que consistem de N resultados, é natural supor que todos os resultados em S sejam igualmente provaveis:

- Lançamento de uma moeda

Espaço amostral com resultados equiprovaveis

Em experimentos que consistem de N resultados, é natural supor que todos os resultados em S sejam igualmente provaveis:

- Lançamento de uma moeda
- Lançamento de r dados não viciados

Espaço amostral com resultados equiprovaveis

Em experimentos que consistem de N resultados, é natural supor que todos os resultados em S sejam igualmente provaveis:

- Lançamento de uma moeda
- Lançamento de r dados não viciados
- Selecionar r cartas de um baralho de 52 cartas

Espaço amostral com resultados equiprovaveis

Em experimentos que consistem de N resultados, é natural supor que todos os resultados em S sejam igualmente provaveis:

- Lançamento de uma moeda
- Lançamento de r dados não viciados
- Selecionar r cartas de um baralho de 52 cartas
- ...

Espaço amostral com resultados equiprovaveis

Em experimentos que consistem de N resultados, é natural supor que todos os resultados em S sejam igualmente provaveis:

- Lançamento de uma moeda
- Lançamento de r dados não viciados
- Selecionar r cartas de um baralho de 52 cartas
- ...

Espaço amostral com resultados equiprovaveis

Em experimentos que consistem de N resultados, é natural supor que todos os resultados em S sejam igualmente provaveis:

- Lançamento de uma moeda
- Lançamento de r dados não viciados
- Selecionar r cartas de um baralho de 52 cartas
- ...

Considere um evento $A \subset S$, então

$$P(A) = \frac{\text{Número de elementos em A}}{\text{Número de elementos em S}}$$

Espaço amostral com resultados equiprovaveis

Tudo é contagem

Quando os resultados são igualente provaveis, calcular a probabilidade é basicamente:

- **contar** o número de resultados em A,
- **contar** o número de todos os resultados possíveis em S,
- formar a razão.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

onde $N(A)$ é o número de elementos em A e N é o número de elementos em S.

Exemplos

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

1. **Se jogarmos quatro dados não viciados, qual é a probabilidade de que os quatro números que aparecem sejam distintos?**

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

1. **Se jogarmos quatro dados não viciados, qual é a probabilidade de que os quatro números que aparecem sejam distintos?**

- $S = \{(i, j, k, l) : i, j, k, l = 1, ..., 6\}$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

1. **Se jogarmos quatro dados não viciados, qual é a probabilidade de que os quatro números que aparecem sejam distintos?**

- $S = \{(i, j, k, l) : i, j, k, l = 1, ..., 6\}$
- $N = 6^4$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

1. **Se jogarmos quatro dados não viciados, qual é a probabilidade de que os quatro números que aparecem sejam distintos?**

- $S = \{(i, j, k, l) : i, j, k, l = 1, ..., 6\}$
- $N = 6^4$
- A: Os quatro números são distintos

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

1. **Se jogarmos quatro dados não viciados, qual é a probabilidade de que os quatro números que aparecem sejam distintos?**

- $S = \{(i, j, k, l) : i, j, k, l = 1, ..., 6\}$
- $N = 6^4$
- A: Os quatro números são distintos
- $N(A) = 6 \times 5 \times 4 \times 3$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

1. **Se jogarmos quatro dados não viciados, qual é a probabilidade de que os quatro números que aparecem sejam distintos?**

- $S = \{(i, j, k, l) : i, j, k, l = 1, ..., 6\}$
- $N = 6^4$
- A: Os quatro números são distintos
- $N(A) = 6 \times 5 \times 4 \times 3$
-
$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{6^4} =$$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

1. **Se jogarmos quatro dados não viciados, qual é a probabilidade de que os quatro números que aparecem sejam distintos?**

- $S = \{(i, j, k, l) : i, j, k, l = 1, ..., 6\}$
- $N = 6^4$
- A: Os quatro números são distintos
- $N(A) = 6 \times 5 \times 4 \times 3$
- $$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{6^4} =$$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

1. **Se jogarmos quatro dados não viciados, qual é a probabilidade de que os quatro números que aparecem sejam distintos?**

- $S = \{(i, j, k, l) : i, j, k, l = 1, ..., 6\}$
- $N = 6^4$
- A: Os quatro números são distintos
- $N(A) = 6 \times 5 \times 4 \times 3$
- $$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{6^4} =$$

```
(6*5*4*3)/(6^4)
```

```
## [1] 0.2777778
```

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

2. **Se jogarmos 6 dados, qual é a probabilidade de cada um dos 6 números apareça apenas 1 vez?**

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

2. **Se jogarmos 6 dados, qual é a probabilidade de cada um dos 6 números apareça apenas 1 vez?**

- $S = \{(i, j, k, l, m, n) : i, j, k, l, m, n = 1, ..., 6\}$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

2. **Se jogarmos 6 dados, qual é a probabilidade de cada um dos 6 números apareça apenas 1 vez?**

- $S = \{(i, j, k, l, m, n) : i, j, k, l, m, n = 1, ..., 6\}$
- $N = 6^6$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

2. **Se jogarmos 6 dados, qual é a probabilidade de cada um dos 6 números apareça apenas 1 vez?**

- $S = \{(i, j, k, l, m, n) : i, j, k, l, m, n = 1, ..., 6\}$
- $N = 6^6$
- A: Cada um dos 6 números aparece apenas 1 vez. $N(A)$?

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

2. **Se jogarmos 6 dados, qual é a probabilidade de cada um dos 6 números apareça apenas 1 vez?**

- $S = \{(i, j, k, l, m, n) : i, j, k, l, m, n = 1, ..., 6\}$
- $N = 6^6$
- A: Cada um dos 6 números aparece apenas 1 vez. $N(A)$?
- Se não considerarmos a ordem, $N(A) = 1$, mas no nosso caso precisamos considerar a ordem, então $N(A) = 6!$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

2. **Se jogarmos 6 dados, qual é a probabilidade de cada um dos 6 números apareça apenas 1 vez?**

- $S = \{(i, j, k, l, m, n) : i, j, k, l, m, n = 1, ..., 6\}$
- $N = 6^6$
- A: Cada um dos 6 números aparece apenas 1 vez. $N(A)$?
- Se não considerarmos a ordem, $N(A) = 1$, mas no nosso caso precisamos considerar a ordem, então $N(A) = 6!$
- $$P(A) = \frac{6!}{6^6}$$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

2. **Se jogarmos 6 dados, qual é a probabilidade de cada um dos 6 números apareça apenas 1 vez?**

- $S = \{(i, j, k, l, m, n) : i, j, k, l, m, n = 1, ..., 6\}$
- $N = 6^6$
- A: Cada um dos 6 números aparece apenas 1 vez. $N(A)$?
- Se não considerarmos a ordem, $N(A) = 1$, mas no nosso caso precisamos considerar a ordem, então $N(A) = 6!$
- $$P(A) = \frac{6!}{6^6}$$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

2. **Se jogarmos 6 dados, qual é a probabilidade de cada um dos 6 números apareça apenas 1 vez?**

- $S = \{(i, j, k, l, m, n) : i, j, k, l, m, n = 1, ..., 6\}$
- $N = 6^6$
- A: Cada um dos 6 números aparece apenas 1 vez. $N(A)$?
- Se não considerarmos a ordem, $N(A) = 1$, mas no nosso caso precisamos considerar a ordem, então $N(A) = 6!$
- $$P(A) = \frac{6!}{6^6}$$

```
factorial(6)/(6^6)
```

```
## [1] 0.0154321
```

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

3. **Uma caixa contém 24 peças (2 estão com defeito). Se seleccionarmos aleatoriamente 10 peças (sem reposição). Qual a probabilidade de seleccionar as 2 peças defeituosas?**

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

3. **Uma caixa contém 24 peças (2 estão com defeito). Se seleccionarmos aleatoriamente 10 peças (sem reposição). Qual a probabilidade de seleccionar as 2 peças defeituosas?**

- S: Todas as formas em que podemos selecionar 10 peças de um total de 24

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

3. **Uma caixa contém 24 peças (2 estão com defeito). Se seleccionarmos aleatoriamente 10 peças (sem reposição). Qual a probabilidade de seleccionar as 2 peças defeituosas?**

- S: Todas as formas em que podemos selecionar 10 peças de um total de 24
- $N = \binom{24}{10}$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

3. **Uma caixa contém 24 peças (2 estão com defeito). Se seleccionarmos aleatoriamente 10 peças (sem reposição). Qual a probabilidade de seleccionar as 2 peças defeituosas?**

- S: Todas as formas em que podemos selecionar 10 peças de um total de 24
- $N = \binom{24}{10}$
- A: seleccionar as 2 peças defeituosas

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

3. **Uma caixa contém 24 peças (2 estão com defeito). Se seleccionarmos aleatoriamente 10 peças (sem reposição). Qual a probabilidade de seleccionar as 2 peças defeituosas?**

- S: Todas as formas em que podemos selecionar 10 peças de um total de 24
- $N = \binom{24}{10}$
- A: seleccionar as 2 peças defeituosas
- $N(A) = \binom{2}{2}\binom{22}{8}$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

3. **Uma caixa contém 24 peças (2 estão com defeito). Se seleccionarmos aleatoriamente 10 peças (sem reposição). Qual a probabilidade de seleccionar as 2 peças defeituosas?**

- S: Todas as formas em que podemos selecionar 10 peças de um total de 24
- $N = \binom{24}{10}$
- A: seleccionar as 2 peças defeituosas
- $N(A) = \binom{2}{2}\binom{22}{8}$
- $$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{\binom{2}{2}\binom{22}{8}}{\binom{24}{10}} =$$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

3. **Uma caixa contém 24 peças (2 estão com defeito). Se seleccionarmos aleatoriamente 10 peças (sem reposição). Qual a probabilidade de seleccionar as 2 peças defeituosas?**

- S: Todas as formas em que podemos selecionar 10 peças de um total de 24
- $N = \binom{24}{10}$
- A: seleccionar as 2 peças defeituosas
- $N(A) = \binom{2}{2}\binom{22}{8}$
- $$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{\binom{2}{2}\binom{22}{8}}{\binom{24}{10}} =$$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

3. **Uma caixa contém 24 peças (2 estão com defeito). Se seleccionarmos aleatoriamente 10 peças (sem reposição). Qual a probabilidade de seleccionar as 2 peças defeituosas?**

- S: Todas as formas em que podemos selecionar 10 peças de um total de 24
- $N = \binom{24}{10}$
- A: seleccionar as 2 peças defeituosas
- $N(A) = \binom{2}{2}\binom{22}{8}$
- $$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{\binom{2}{2}\binom{22}{8}}{\binom{24}{10}} =$$

```
(choose(2,2)*choose(22,8))/choose(24,10)
```

```
## [1] 0.1630435
```

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

4. **De um grupo de 100 pessoas, vamos seleccionar aleatoriamente um comitê de 12 pessoas. Qual é a probabilidade que duas pessoas (A e B) sejam seleccionadas?**

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

4. **De um grupo de 100 pessoas, vamos seleccionar aleatoriamente um comitê de 12 pessoas. Qual é a probabilidade que duas pessoas (*A* e *B*) sejam seleccionadas?**

- S: Todas as formas de formar um grupo de 12 pessoas de um total de 100

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

4. **De um grupo de 100 pessoas, vamos seleccionar aleatoriamente um comitê de 12 pessoas. Qual é a probabilidade que duas pessoas (A e B) sejam seleccionadas?**

- S: Todas as formas de formar um grupo de 12 pessoas de um total de 100
- $N = \binom{100}{12}$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

4. **De um grupo de 100 pessoas, vamos seleccionar aleatoriamente um comitê de 12 pessoas. Qual é a probabilidade que duas pessoas (A e B) sejam seleccionadas?**

- S: Todas as formas de formar um grupo de 12 pessoas de um total de 100
- $N = \binom{100}{12}$
- A: As pessoas A e B estão no comitê.

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

4. **De um grupo de 100 pessoas, vamos seleccionar aleatoriamente um comitê de 12 pessoas. Qual é a probabilidade que duas pessoas (*A* e *B*) sejam seleccionadas?**

- S: Todas as formas de formar um grupo de 12 pessoas de um total de 100
- $N = \binom{100}{12}$
- A: As pessoas A e B estão no comitê.
- $N(A) = \binom{2}{2}\binom{98}{10}$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

4. **De um grupo de 100 pessoas, vamos seleccionar aleatoriamente um comitê de 12 pessoas. Qual é a probabilidade que duas pessoas (*A* e *B*) sejam seleccionadas?**

- S: Todas as formas de formar um grupo de 12 pessoas de um total de 100
- $N = \binom{100}{12}$
- A: As pessoas A e B estão no comitê.
- $N(A) = \binom{2}{2}\binom{98}{10}$
- $$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{\binom{2}{2}\binom{98}{10}}{\binom{100}{12}} =$$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

4. **De um grupo de 100 pessoas, vamos seleccionar aleatoriamente um comitê de 12 pessoas. Qual é a probabilidade que duas pessoas (A e B) sejam seleccionadas?**

- S: Todas as formas de formar um grupo de 12 pessoas de um total de 100
- $N = \binom{100}{12}$
- A: As pessoas A e B estão no comitê.
- $N(A) = \binom{2}{2}\binom{98}{10}$
- $$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{\binom{2}{2}\binom{98}{10}}{\binom{100}{12}} =$$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

4. **De um grupo de 100 pessoas, vamos seleccionar aleatoriamente um comitê de 12 pessoas. Qual é a probabilidade que duas pessoas (*A* e *B*) sejam seleccionadas?**

- S: Todas as formas de formar um grupo de 12 pessoas de um total de 100
- $N = \binom{100}{12}$
- A: As pessoas A e B estão no comitê.
- $N(A) = \binom{2}{2}\binom{98}{10}$
- $$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{\binom{2}{2}\binom{98}{10}}{\binom{100}{12}} =$$

```
(choose(2,2)*choose(98,10))/choose(100,12)
```

```
## [1] 0.01333333
```

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

5. **35 pessoas são alocadas aleatoriamente em 2 grupos (um com 10 e outro com 25 pessoas). Qual é a probabilidade de que 2 pessoas específicas (A e B) estejam no mesmo grupo?**

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

5. **35 pessoas são alocadas aleatoriamente em 2 grupos (um com 10 e outro com 25 pessoas). Qual é a probabilidade de que 2 pessoas específicas (A e B) estejam no mesmo grupo?**

- S: Todas as formas possíveis de dividir 35 pessoas nos 2 grupos.

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

5. **35 pessoas são alocadas aleatoriamente em 2 grupos (um com 10 e outro com 25 pessoas). Qual é a probabilidade de que 2 pessoas específicas (A e B) estejam no mesmo grupo?**

- S: Todas as formas possíveis de dividir 35 pessoas nos 2 grupos.
- $N = \binom{35}{10} \times \binom{25}{25} = \binom{35}{10}$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

5. **35 pessoas são alocadas aleatoriamente em 2 grupos (um com 10 e outro com 25 pessoas). Qual é a probabilidade de que 2 pessoas específicas (A e B) estejam no mesmo grupo?**

- S: Todas as formas possíveis de dividir 35 pessoas nos 2 grupos.
- $N = \binom{35}{10} \times \binom{25}{25} = \binom{35}{10}$
- A: As pessoas A e B estão no mesmo grupo (pode ser no grupo de 10 ou no grupo de 25 pessoas)

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

5. **35 pessoas são alocadas aleatoriamente em 2 grupos (um com 10 e outro com 25 pessoas). Qual é a probabilidade de que 2 pessoas específicas (A e B) estejam no mesmo grupo?**

- S: Todas as formas possíveis de dividir 35 pessoas nos 2 grupos.
- $N = \binom{35}{10} \times \binom{25}{25} = \binom{35}{10}$
- A: As pessoas A e B estão no mesmo grupo (pode ser no grupo de 10 ou no grupo de 25 pessoas)
- $N(A) = \binom{2}{2}\binom{33}{8} + \binom{2}{2}\binom{33}{23}$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

5. **35 pessoas são alocadas aleatoriamente em 2 grupos (um com 10 e outro com 25 pessoas). Qual é a probabilidade de que 2 pessoas específicas (A e B) estejam no mesmo grupo?**

- S: Todas as formas possíveis de dividir 35 pessoas nos 2 grupos.
- $N = \binom{35}{10} \times \binom{25}{25} = \binom{35}{10}$
- A: As pessoas A e B estão no mesmo grupo (pode ser no grupo de 10 ou no grupo de 25 pessoas)
- $N(A) = \binom{2}{2}\binom{33}{8} + \binom{2}{2}\binom{33}{23}$
- $$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{\binom{2}{2}\binom{33}{8} + \binom{2}{2}\binom{33}{23}}{\binom{35}{10}}$$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

6. **Se as letras** $A, A, E, I, I, C, T, T, T, S, S$ **forem ordenadas aleatoriamente, qual a probabilidade de formar a palavra** $ESTATISTICA$**?**

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

6. **Se as letras $A, A, E, I, I, C, T, T, T, S, S$ forem ordenadas aleatoriamente, qual a probabilidade de formar a palavra** *ESTATISTICA***?**

- Seja E: ordenar aleatoriamente as letras $L = \{A, A, E, I, I, C, T, T, T, S, S\}$ e observar a palavra resultante

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

6. **Se as letras $A, A, E, I, I, C, T, T, T, S, S$ forem ordenadas aleatoriamente, qual a probabilidade de formar a palavra** *ESTATISTICA***?**

- Seja E: ordenar aleatoriamente as letras $L = \{A, A, E, I, I, C, T, T, T, S, S\}$ e observar a palavra resultante
- $S = \{$Todas as palavras $\neq$ s formadas com as letras em $L\}$

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

6. **Se as letras $A, A, E, I, I, C, T, T, T, S, S$ forem ordenadas aleatoriamente, qual a probabilidade de formar a palavra** *ESTATISTICA***?**

- Seja E: ordenar aleatoriamente as letras $L = \{A, A, E, I, I, C, T, T, T, S, S\}$ e observar a palavra resultante
- $S = \{$Todas as palavras $\neq$ s formadas com as letras em $L\}$
- Seja N o número de elemento em S

Combinatoria e probabilidades: Exemplos

6. **Se as letras $A, A, E, I, I, C, T, T, T, S, S$ forem ordenadas aleatoriamente, qual a probabilidade de formar a palavra $ESTATISTICA$?**

- Seja E: ordenar aleatoriamente as letras $L = \{A, A, E, I, I, C, T, T, T, S, S\}$ e observar a palavra resultante
- $S = \{\text{Todas as palavras} \neq \text{s formadas com as letras em } L\}$
- Seja N o número de elemento em S
- Seja o evento A: a palavra formada é ESTATISTICA

Combinatoria e probabilidades

```r
# N: Permutaçao com repeticao
# na = 2; ne = 1, ni = 2, nc = 1, nt = 3, ns= 2
N = factorial(11)/(factorial(2)^3*factorial(3))
# P(A)=
1/N
```

```
## [1] 1.202501e-06
```

Combinatoria e probabilidades

Outra forma:

```
# N: todas as permutaçoes
N = factorial(11)
# A: ESTATISTICA
Na = 1*2*3*2*2*2*1*1*1*1*1
# P(A)=
Na/N
```

```
## [1] 1.202501e-06
```

```
# na = 2; ni = 2, nt = 3, ns= 2
Na = factorial(2)*factorial(2)*factorial(3)*factorial(2)
Na/N
```

```
## [1] 1.202501e-06
```

Combinatoria e probabilidades

7. **Suponha que lançamos 7 dados não viciados. Qual é a probabilidade de que cada um dos 6 números distintos apareça pelo menos 1 vez?**

Combinatoria e probabilidades

7. **Suponha que lançamos 7 dados não viciados. Qual é a probabilidade de que cada um dos 6 números distintos apareça pelo menos 1 vez?**

- $S = \{(i_1, i_2, ..., i_7) : i_1, i_2, ..., i_7 = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $N = 6^7$

Combinatoria e probabilidades

7. **Suponha que lançamos 7 dados não viciados. Qual é a probabilidade de que cada um dos 6 números distintos apareça pelo menos 1 vez?**

- $S = \{(i_1, i_2, ..., i_7) : i_1, i_2, ..., i_7 = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $N = 6^7$
- A : cada um dos 6 números aparece pelo menos 1 vez. $N(A)$?

Combinatoria e probabilidades

7. **Suponha que lançamos 7 dados não viciados. Qual é a probabilidade de que cada um dos 6 números distintos apareça pelo menos 1 vez?**

- $S = \{(i_1, i_2, ..., i_7) : i_1, i_2, ..., i_7 = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $N = 6^7$
- A : cada um dos 6 números aparece pelo menos 1 vez. $N(A)$?
- Para que cada número apareça pelo menos 1 vez, um número precisa aparecer 2 vezes (suponhamos n_1)

Combinatoria e probabilidades

7. **Suponha que lançamos 7 dados não viciados. Qual é a probabilidade de que cada um dos 6 números distintos apareça pelo menos 1 vez?**

- $S = \{(i_1, i_2, ..., i_7) : i_1, i_2, ..., i_7 = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $N = 6^7$
- A : cada um dos 6 números aparece pelo menos 1 vez. $N(A)$?
- Para que cada número apareça pelo menos 1 vez, um número precisa aparecer 2 vezes (suponhamos n_1)
- $\binom{7}{2,1,1,1,1,1} = \frac{7!}{2!}$

Combinatoria e probabilidades

7. **Suponha que lançamos 7 dados não viciados. Qual é a probabilidade de que cada um dos 6 números distintos apareça pelo menos 1 vez?**

- $S = \{(i_1, i_2, ..., i_7) : i_1, i_2, ..., i_7 = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $N = 6^7$
- A : cada um dos 6 números aparece pelo menos 1 vez. $N(A)$?
- Para que cada número apareça pelo menos 1 vez, um número precisa aparecer 2 vezes (suponhamos n_1)
- $\binom{7}{2,1,1,1,1,1} = \frac{7!}{2!}$
- Quantas escolhas do número que repete duas vezes temos?

Combinatoria e probabilidades

7. **Suponha que lançamos 7 dados não viciados. Qual é a probabilidade de que cada um dos 6 números distintos apareça pelo menos 1 vez?**

- $S = \{(i_1, i_2, ..., i_7) : i_1, i_2, ..., i_7 = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $N = 6^7$
- A : cada um dos 6 números aparece pelo menos 1 vez. $N(A)$?
- Para que cada número apareça pelo menos 1 vez, um número precisa aparecer 2 vezes (suponhamos n_1)
- $\binom{7}{2,1,1,1,1,1} = \frac{7!}{2!}$
- Quantas escolhas do número que repete duas vezes temos?
- Então, $N(A) = 6 \times \frac{7!}{2!}$

Combinatoria e probabilidades

7. **Suponha que lançamos 7 dados não viciados. Qual é a probabilidade de que cada um dos 6 números distintos apareça pelo menos 1 vez?**

- $S = \{(i_1, i_2, ..., i_7) : i_1, i_2, ..., i_7 = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $N = 6^7$
- A : cada um dos 6 números aparece pelo menos 1 vez. $N(A)$?
- Para que cada número apareça pelo menos 1 vez, um número precisa aparecer 2 vezes (suponhamos n_1)
- $\binom{7}{2,1,1,1,1,1} = \dfrac{7!}{2!}$
- Quantas escolhas do número que repete duas vezes temos?
- Então, $N(A) = 6 \times \dfrac{7!}{2!}$
- $P(A) = \frac{6\times\frac{7!}{2!}}{6^7} = \frac{7!}{2\times 6^6}$

Combinatoria e probabilidades

8. **Um baralho com 52 cartas possui 12 figuras. Se as 52 cartas são distribuidas aleatoriamente entre 4 jogadores de forma que cada um deles receba 13 cartas, qual a probabilidade de que cada jogador receba 3 figuras?**

Combinatoria e probabilidades

8. **Um baralho com 52 cartas possui 12 figuras. Se as 52 cartas são distribuidas aleatoriamente entre 4 jogadores de forma que cada um deles receba 13 cartas, qual a probabilidade de que cada jogador receba 3 figuras?**

- S: Todas as possiveis formas de distribuir 52 cartas em 4 jogadores com 13 cartas cada

Combinatoria e probabilidades

8. **Um baralho com 52 cartas possui 12 figuras. Se as 52 cartas são distribuidas aleatoriamente entre 4 jogadores de forma que cada um deles receba 13 cartas, qual a probabilidade de que cada jogador receba 3 figuras?**

- S: Todas as possiveis formas de distribuir 52 cartas em 4 jogadores com 13 cartas cada
- **Reinterpretando:** De quantas formas podemos distribuir 52 cartas em 4 grupos de tamanho 13 cada? De N formas

Combinatoria e probabilidades

8. **Um baralho com 52 cartas possui 12 figuras. Se as 52 cartas são distribuidas aleatoriamente entre 4 jogadores de forma que cada um deles receba 13 cartas, qual a probabilidade de que cada jogador receba 3 figuras?**

- S: Todas as possiveis formas de distribuir 52 cartas em 4 jogadores com 13 cartas cada
- **Reinterpretando:** De quantas formas podemos distribuir 52 cartas em 4 grupos de tamanho 13 cada? De N formas
- $$N = \binom{52}{13, 13, 13, 13}$$

Combinatoria e probabilidades

8. **Um baralho com 52 cartas possui 12 figuras. Se as 52 cartas são distribuidas aleatoriamente entre 4 jogadores de forma que cada um deles receba 13 cartas, qual a probabilidade de que cada jogador receba 3 figuras?**

- S: Todas as possiveis formas de distribuir 52 cartas em 4 jogadores com 13 cartas cada
- **Reinterpretando:** De quantas formas podemos distribuir 52 cartas em 4 grupos de tamanho 13 cada? De N formas
- $$N = \binom{52}{13, 13, 13, 13}$$
- A : cada jogador recebe 3 figuras. $N(A)$?

Combinatoria e probabilidades

Primeira forma

Combinatoria e probabilidades

Primeira forma

$$N(A) = \binom{12}{3}\binom{40}{10} \times \binom{9}{3}\binom{30}{10} \times \binom{6}{3}\binom{20}{10} \times \binom{3}{3}\binom{10}{10}$$

Combinatoria e probabilidades

Primeira forma

$$N(A) = \binom{12}{3}\binom{40}{10} \times \binom{9}{3}\binom{30}{10} \times \binom{6}{3}\binom{20}{10} \times \binom{3}{3}\binom{10}{10}$$

$$N(A) = \frac{12!}{3!9!}\frac{40!}{10!30!} \times \frac{9!}{3!6!}\frac{30!}{10!20!} \times \frac{6!}{3!3!}\frac{20!}{10!10!} \times \frac{3!}{3!0!}\frac{10!}{10!0!} = \frac{12!40!}{(3!)^4(10!)^4}$$

Combinatoria e probabilidades

Primeira forma

$$N(A) = \binom{12}{3}\binom{40}{10} \times \binom{9}{3}\binom{30}{10} \times \binom{6}{3}\binom{20}{10} \times \binom{3}{3}\binom{10}{10}$$

$$N(A) = \frac{12!}{3!9!}\frac{40!}{10!30!} \times \frac{9!}{3!6!}\frac{30!}{10!20!} \times \frac{6!}{3!3!}\frac{20!}{10!10!} \times \frac{3!}{3!0!}\frac{10!}{10!0!} = \frac{12!40!}{(3!)^4(10!)^4}$$

Segunda forma

$$N(A) = \binom{12}{3,3,3,3}\binom{40}{10,10,10,10} = \frac{12!}{3!3!3!3!}\frac{40}{10!10!10!10!} = \frac{12!40!}{(3!)^4(10!)^4}$$

Combinatoria e probabilidades

Então,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{\frac{12!40!}{(3!)^4(10!)^4}}{\frac{52!}{(13!)^4}}$$

```r
#Na
numNa = factorial(12)*factorial(40)
denNa = (factorial(3)^4)*(factorial(10)^4)
Na = numNa/denNa
#N
N = factorial(52)/(factorial(13)^4)
# P(A)
Na/N
```

```
## [1] 0.03241886
```

Combinatoria e probabilidades

9. **Suponha que 2 meninas chamadas Carla, 3 crianças chamadas Maria e 4 crianças chamadas Tamires se sentam aleatoriamente em uma fileira de 9 assentos. Qual é a probabilidade de que as Carlas ocupem os dois primeiros assentos da fileira, as Marias os três assentos seguintes e as Tamires os quatro ultimos?**

Combinatoria e probabilidades

9. **Suponha que 2 meninas chamadas Carla, 3 crianças chamadas Maria e 4 crianças chamadas Tamires se sentam aleatoriamente em uma fileira de 9 assentos. Qual é a probabilidade de que as Carlas ocupem os dois primeiros assentos da fileira, as Marias os três assentos seguintes e as Tamires os quatro ultimos?**

- S : Todas as possíveis que as 9 crianças podem se sentar

Combinatoria e probabilidades

9. **Suponha que 2 meninas chamadas Carla, 3 crianças chamadas Maria e 4 crianças chamadas Tamires se sentam aleatoriamente em uma fileira de 9 assentos. Qual é a probabilidade de que as Carlas ocupem os dois primeiros assentos da fileira, as Marias os três assentos seguintes e as Tamires os quatro ultimos?**

- S : Todas as possíveis que as 9 crianças podem se sentar
- $N = 9!$

Combinatoria e probabilidades

9. **Suponha que 2 meninas chamadas Carla, 3 crianças chamadas Maria e 4 crianças chamadas Tamires se sentam aleatoriamente em uma fileira de 9 assentos. Qual é a probabilidade de que as Carlas ocupem os dois primeiros assentos da fileira, as Marias os três assentos seguintes e as Tamires os quatro ultimos?**

- S : Todas as possíveis que as 9 crianças podem se sentar
- $N = 9!$
- A : As Carlas ocupem os dois primeiros assentos da fileira, as Marias os três assentos seguintes e as Tamires os quatro ultimos

Combinatoria e probabilidades

9. **Suponha que 2 meninas chamadas Carla, 3 crianças chamadas Maria e 4 crianças chamadas Tamires se sentam aleatoriamente em uma fileira de 9 assentos. Qual é a probabilidade de que as Carlas ocupem os dois primeiros assentos da fileira, as Marias os três assentos seguintes e as Tamires os quatro ultimos?**

- S : Todas as possíveis que as 9 crianças podem se sentar
- $N = 9!$
- A : As Carlas ocupem os dois primeiros assentos da fileira, as Marias os três assentos seguintes e as Tamires os quatro ultimos
- $N(A) = 2!3!4!$

Combinatoria e probabilidades

9. **Suponha que 2 meninas chamadas Carla, 3 crianças chamadas Maria e 4 crianças chamadas Tamires se sentam aleatoriamente em uma fileira de 9 assentos. Qual é a probabilidade de que as Carlas ocupem os dois primeiros assentos da fileira, as Marias os três assentos seguintes e as Tamires os quatro ultimos?**

- S : Todas as possíveis que as 9 crianças podem se sentar
- $N = 9!$
- A : As Carlas ocupem os dois primeiros assentos da fileira, as Marias os três assentos seguintes e as Tamires os quatro ultimos
- $N(A) = 2!3!4!$
- $$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{2!3!4!}{9!}$$

Combinatoria e probabilidades

10. **João tem n pares de tênis no closet. Se escolhe aleatoriamente 2 tênis, qual é a probabilidade de formar um par correto?**

10. **João tem n pares de tênis no closet. Se escolhe aleatoriamente 2 tênis, qual é a probabilidade de formar um par correto?**

- S : Todas as possiveis escolhas de 2 em 2 entre os $2n$ tênis.

10. **João tem n pares de tênis no closet. Se escolhe aleatoriamente 2 tênis, qual é a probabilidade de formar um par correto?**

- S : Todas as possiveis escolhas de 2 em 2 entre os $2n$ tênis.
- $N = \binom{2n}{2}$

Combinatoria e probabilidades

10. **João tem n pares de tênis no closet. Se escolhe aleatoriamente 2 tênis, qual é a probabilidade de formar um par correto?**

- S : Todas as possiveis escolhas de 2 em 2 entre os $2n$ tênis.
- $N = \binom{2n}{2}$
- A : escolher um par correto

Combinatoria e probabilidades

10. **João tem n pares de tênis no closet. Se escolhe aleatoriamente 2 tênis, qual é a probabilidade de formar um par correto?**

- S : Todas as possiveis escolhas de 2 em 2 entre os $2n$ tênis.
- $N = \binom{2n}{2}$
- A : escolher um par correto
- $N(A) = n$

Combinatoria e probabilidades

10. **João tem n pares de tênis no closet. Se escolhe aleatoriamente 2 tênis, qual é a probabilidade de formar um par correto?**

- S : Todas as possiveis escolhas de 2 em 2 entre os $2n$ tênis.
- $N = \binom{2n}{2}$
- A : escolher um par correto
- $N(A) = n$
- $$P(A) = \frac{n}{\binom{2n}{2}} = \frac{1}{2n-1}$$

Combinatoria e probabilidades

```r
# Caso particular n = 10
N = choose(20,2)
Na = 10
Na/N
```

```
## [1] 0.05263158
```

```r
1/19
```

```
## [1] 0.05263158
```

Leituras recomendadas

- Anderson, D. R; Sweeney, D. J.; e Williams, T. A. (2008). *Estatística Aplicada à Administração e Economia*. 2ed. Cengage Learning. **Cap 4.1–Cap 4.3**
- Degroot, M. H; e Schervish, M. J. (2012). *Probability and Statistics*. 4ed, Pearson. **Chapter 1.5, 1.10**