MAD211 - Estatística para Administração

Análise Combinatória

Prof. Carlos Trucíos
carlos.trucios@facc.ufrj.br
ctruciosm.github.io

Faculdade de Administração e Ciências Contábeis,
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Aula 7

Introdução

Princípio básico de contagem

Arranjos, Permutações e Combinações

Coeficientes multinomiais

Soluções de equações inteiras

Introdução

Introdução

Um sistema de comunicação é formado por $n = 5$ antenas aparentemente idênticas que devem ser alinhadas em sequência. O sistema será funcional (i.e. capaz de receber qualquer sinal) se duas antenas consecutivas não apresentam defeito (1: antena sem defeito e 0: antena com defeito). Se $m = 2$ das n antenas apresentam defeito:

Introdução

Um sistema de comunicação é formado por $n = 5$ antenas aparentemente idênticas que devem ser alinhadas em sequência. O sistema será funcional (i.e. capaz de receber qualquer sinal) se duas antenas consecutivas não apresentam defeito (1: antena sem defeito e 0: antena com defeito). Se $m = 2$ das n antenas apresentam defeito:

- Quantas configurações possíveis existem para o sistema?

Introdução

Um sistema de comunicação é formado por $n = 5$ antenas aparentemente idênticas que devem ser alinhadas em sequência. O sistema será funcional (i.e. capaz de receber qualquer sinal) se duas antenas consecutivas não apresentam defeito (1: antena sem defeito e 0: antena com defeito). Se $m = 2$ das n antenas apresentam defeito:

- Quantas configurações possíveis existem para o sistema?
- Quantas dessas configurações são funcionais?

Motivação

	Ant.1	Ant.2	Ant.3	Ant.4	Ant.5
Config.1	0	0	1	1	1
Config.2	0	1	0	1	1
Config.3	1	0	0	1	1
Config.4	0	1	1	0	1
Config.5	1	0	1	0	1
Config.6	1	1	0	0	1
Config.7	1	0	1	1	0
Config.8	1	1	0	1	0
Config.9	0	1	1	1	0
Config.10	1	1	1	0	0

- Quantas configurações possíveis existem para o sistema?

Motivação

	Ant.1	Ant.2	Ant.3	Ant.4	Ant.5
Config.1	0	0	1	1	1
Config.2	0	1	0	1	1
Config.3	1	0	0	1	1
Config.4	0	1	1	0	1
Config.5	1	0	1	0	1
Config.6	1	1	0	0	1
Config.7	1	0	1	1	0
Config.8	1	1	0	1	0
Config.9	0	1	1	1	0
Config.10	1	1	1	0	0

- Quantas configurações possíveis existem para o sistema?
- Quantas dessas configurações são funcionais?

Motivação

E se. . . .

- $n = 10$ e $m = 3$

Motivação

E se. . . .

- $n = 10$ e $m = 3$
- $n = 30$ e $m = 9$

Motivação

E se. . . .

- $n = 10$ e $m = 3$
- $n = 30$ e $m = 9$
- $n = 124$ e $m = 50$

Motivação

E se. . . .

- $n = 10$ e $m = 3$
- $n = 30$ e $m = 9$
- $n = 124$ e $m = 50$

Motivação

E se. . . .

- $n = 10$ e $m = 3$
- $n = 30$ e $m = 9$
- $n = 124$ e $m = 50$

Possuir um método eficaz para contar o número de formas pelas quais as coisas podem acontecer é bastante útil.

Motivação

E se. . . .

- $n = 10$ e $m = 3$
- $n = 30$ e $m = 9$
- $n = 124$ e $m = 50$

Possuir um método eficaz para contar o número de formas pelas quais as coisas podem acontecer é bastante útil.

A teoria matemática de contagem é formalmente conhecida como **análise combinatória**.

Motivação

E se. . . .

- $n = 10$ e $m = 3$
- $n = 30$ e $m = 9$
- $n = 124$ e $m = 50$

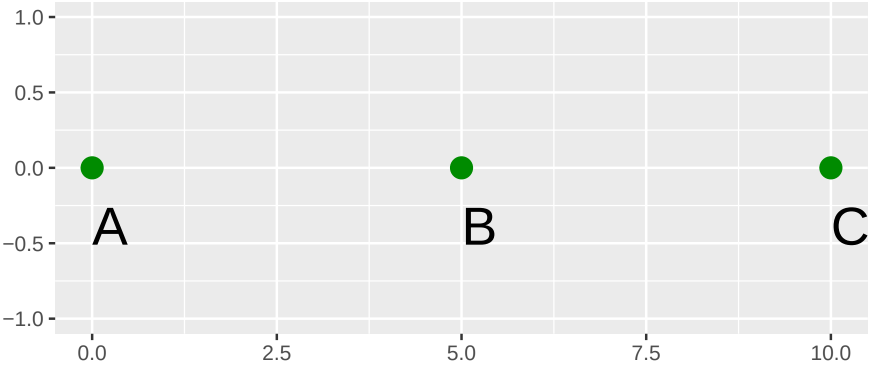
Possuir um método eficaz para contar o número de formas pelas quais as coisas podem acontecer é bastante útil.

A teoria matemática de contagem é formalmente conhecida como **análise combinatória**.

Sermos capazes de identificar e contar possíveis resultados é uma etapa importante e necessária na atribuição de probabilidades.

Princípio básico de contagem

Princípio básico de contagem



Princípio básico de contagem

O princípio básico de contagem

Suponha a realização de dois experimentos (E_1 e E_2). Se o E_1 pode gerar qualquer um de n_1 resultados possíveis e se, para cada um dos resultados de E_1 (ou seja, independentemente do resultado obtido em E_1), existem n_2 resultados possíveis do E_2, então os dois experimentos possuem conjuntamente $n_1 \times n_2$ resultados possíveis

Princípio básico de contagem

Exemplo

Suponha que se lançam dois dados (um convencional e outro com 8 faces) e que observamos o número da face superior. Qual o número de resultados possíveis que podem ser obtidos?

Princípio básico de contagem

Exemplo

Suponha que se lançam dois dados (um convencional e outro com 8 faces) e que observamos o número da face superior. Qual o número de resultados possíveis que podem ser obtidos?

- 8: do dado de 8 faces

Princípio básico de contagem

Exemplo

Suponha que se lançam dois dados (um convencional e outro com 8 faces) e que observamos o número da face superior. Qual o número de resultados possíveis que podem ser obtidos?

- 8: do dado de 8 faces
- 6: do dado de 6 faces

Princípio básico de contagem

Exemplo

Suponha que se lançam dois dados (um convencional e outro com 8 faces) e que observamos o número da face superior. Qual o número de resultados possíveis que podem ser obtidos?

- 8: do dado de 8 faces
- 6: do dado de 6 faces
- Pelo princípio básico de contagem,

$$8 \times 6 = 48$$

Princípio básico de contagem

Generalização do princípio básico de contagem

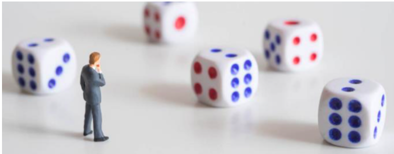
Sejam r experimentos (E_1, E_2, $\cdots$, E_r) tais que E_1 pode levar a qualquer um de n_1 resultados, E_2 pode levar a qualquer um de n_2 resultados (independende do resultado obtido no E_1), ... E_r pode levar a qualquer um de n_r resultados (independende do resultados obtido no $E_1, \cdots, E_{r-1}$). Então, para os r experimentos teremos um total de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ resultados possíveis.

Princípio básico de contagem

Generalização do princípio básico de contagem

Sejam r experimentos (E_1, E_2, $\cdots$, E_r) tais que E_1 pode levar a qualquer um de n_1 resultados, E_2 pode levar a qualquer um de n_2 resultados (independente do resultado obtido no E_1), ... E_r pode levar a qualquer um de n_r resultados (independente do resultados obtido no $E_1, \cdots, E_{r-1}$). Então, para os r experimentos teremos um total de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ resultados possíveis.

Exemplo

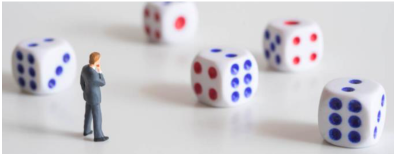


Princípio básico de contagem

Generalização do princípio básico de contagem

Sejam r experimentos (E_1, E_2, $\cdots$, E_r) tais que E_1 pode levar a qualquer um de n_1 resultados, E_2 pode levar a qualquer um de n_2 resultados (independente do resultado obtido no E_1), ... E_r pode levar a qualquer um de n_r resultados (independente do resultados obtido no $E_1, \cdots, E_{r-1}$). Então, para os r experimentos teremos um total de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ resultados possíveis.

Exemplo



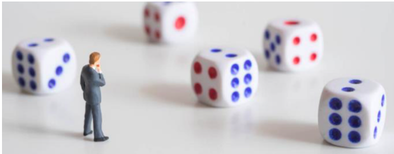
- 6: do primeiro dado

Princípio básico de contagem

Generalização do princípio básico de contagem

Sejam r experimentos (E_1, E_2, $\cdots$, E_r) tais que E_1 pode levar a qualquer um de n_1 resultados, E_2 pode levar a qualquer um de n_2 resultados (independente do resultado obtido no E_1), ... E_r pode levar a qualquer um de n_r resultados (independente do resultados obtido no $E_1, \cdots, E_{r-1}$). Então, para os r experimentos teremos um total de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ resultados possíveis.

Exemplo



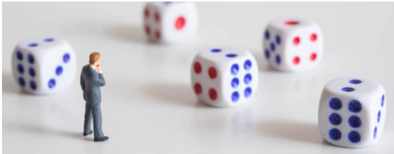
- 6: do primeiro dado
- 6: do segundo dado

Princípio básico de contagem

Generalização do princípio básico de contagem

Sejam r experimentos $(E_1, E_2, \cdots, E_r)$ tais que E_1 pode levar a qualquer um de n_1 resultados, E_2 pode levar a qualquer um de n_2 resultados (independente do resultado obtido no E_1), ... E_r pode levar a qualquer um de n_r resultados (independente do resultados obtido no $E_1, \cdots, E_{r-1}$). Então, para os r experimentos teremos um total de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ resultados possíveis.

Exemplo



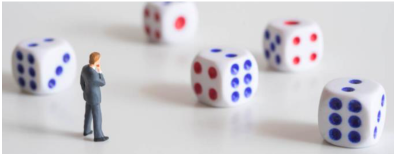
- 6: do primeiro dado
- 6: do segundo dado
- 6: do terceiro dado

Princípio básico de contagem

Generalização do princípio básico de contagem

Sejam r experimentos (E_1, E_2, $\cdots$, E_r) tais que E_1 pode levar a qualquer um de n_1 resultados, E_2 pode levar a qualquer um de n_2 resultados (independente do resultado obtido no E_1), ... E_r pode levar a qualquer um de n_r resultados (independente do resultados obtido no $E_1, \cdots, E_{r-1}$). Então, para os r experimentos teremos um total de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ resultados possíveis.

Exemplo



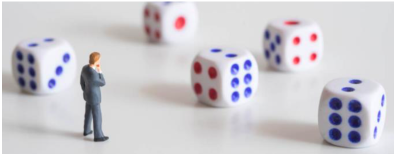
- 6: do primeiro dado
- 6: do segundo dado
- 6: do terceiro dado
- 6: do quarto dado

Princípio básico de contagem

Generalização do princípio básico de contagem

Sejam r experimentos (E_1, E_2, $\cdots$, E_r) tais que E_1 pode levar a qualquer um de n_1 resultados, E_2 pode levar a qualquer um de n_2 resultados (independente do resultado obtido no E_1), ... E_r pode levar a qualquer um de n_r resultados (independente do resultados obtido no $E_1, \cdots, E_{r-1}$). Então, para os r experimentos teremos um total de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ resultados possíveis.

Exemplo



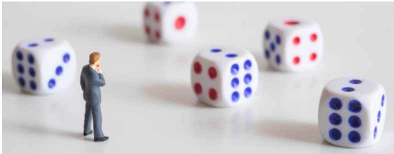
- 6: do primeiro dado
- 6: do segundo dado
- 6: do terceiro dado
- 6: do quarto dado
- 6: do quinto dado

Princípio básico de contagem

Generalização do princípio básico de contagem

Sejam r experimentos $(E_1, E_2, \cdots, E_r)$ tais que E_1 pode levar a qualquer um de n_1 resultados, E_2 pode levar a qualquer um de n_2 resultados (independente do resultado obtido no E_1), ... E_r pode levar a qualquer um de n_r resultados (independente do resultados obtido no $E_1, \cdots, E_{r-1}$). Então, para os r experimentos teremos um total de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ resultados possíveis.

Exemplo



- 6: do primeiro dado
- 6: do segundo dado
- 6: do terceiro dado
- 6: do quarto dado
- 6: do quinto dado
- $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^5 = 7776$

Princípio básico de contagem

Outros exemplos

Sabendo que cada placa de carro é formada por 7 caracteres (sendo os 3 primeiros espaços ocupados por letras e os 4 restantes por números). Quantas placas de carro distintas podem existir?

Princípio básico de contagem

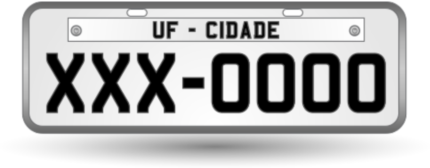
Outros exemplos

Sabendo que cada placa de carro é formada por 7 caracteres (sendo os 3 primeiros espaços ocupados por letras e os 4 restantes por números). Quantas placas de carro distintas podem existir?

Princípio básico de contagem

Outros exemplos

Sabendo que cada placa de carro é formada por 7 caracteres (sendo os 3 primeiros espaços ocupados por letras e os 4 restantes por números). Quantas placas de carro distintas podem existir?

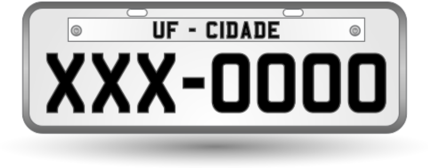


- Primeira posição: 26 opções

Princípio básico de contagem

Outros exemplos

Sabendo que cada placa de carro é formada por 7 caracteres (sendo os 3 primeiros espaços ocupados por letras e os 4 restantes por números). Quantas placas de carro distintas podem existir?

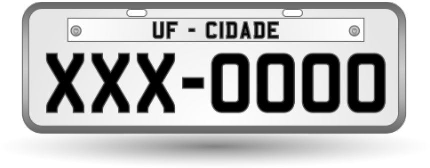


- Primeira posição: 26 opções
- Segunda posição: 26 opções

Princípio básico de contagem

Outros exemplos

Sabendo que cada placa de carro é formada por 7 caracteres (sendo os 3 primeiros espaços ocupados por letras e os 4 restantes por números). Quantas placas de carro distintas podem existir?

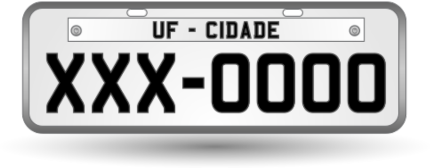


- Primeira posição: 26 opções
- Segunda posição: 26 opções
- Terceira posição: 26 opções

Princípio básico de contagem

Outros exemplos

Sabendo que cada placa de carro é formada por 7 caracteres (sendo os 3 primeiros espaços ocupados por letras e os 4 restantes por números). Quantas placas de carro distintas podem existir?



- Primeira posição: 26 opções
- Segunda posição: 26 opções
- Terceira posição: 26 opções
- Quarta posição: 10 opções

Princípio básico de contagem

Outros exemplos

Sabendo que cada placa de carro é formada por 7 caracteres (sendo os 3 primeiros espaços ocupados por letras e os 4 restantes por números). Quantas placas de carro distintas podem existir?

- Primeira posição: 26 opções
- Segunda posição: 26 opções
- Terceira posição: 26 opções
- Quarta posição: 10 opções
- Quinta posição: 10 opções

Princípio básico de contagem

Outros exemplos

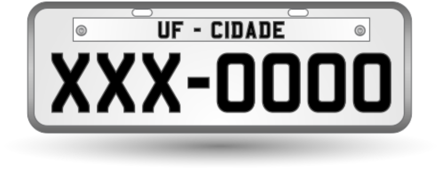
Sabendo que cada placa de carro é formada por 7 caracteres (sendo os 3 primeiros espaços ocupados por letras e os 4 restantes por números). Quantas placas de carro distintas podem existir?

- Primeira posição: 26 opções
- Segunda posição: 26 opções
- Terceira posição: 26 opções
- Quarta posição: 10 opções
- Quinta posição: 10 opções
- Sexta posição: 10 opções

Princípio básico de contagem

Outros exemplos

Sabendo que cada placa de carro é formada por 7 caracteres (sendo os 3 primeiros espaços ocupados por letras e os 4 restantes por números). Quantas placas de carro distintas podem existir?



- Primeira posição: 26 opções
- Segunda posição: 26 opções
- Terceira posição: 26 opções
- Quarta posição: 10 opções
- Quinta posição: 10 opções
- Sexta posição: 10 opções
- Sétima posição: 10 opções

Princípio básico de contagem

Outros exemplos

Sabendo que cada placa de carro é formada por 7 caracteres (sendo os 3 primeiros espaços ocupados por letras e os 4 restantes por números). Quantas placas de carro distintas podem existir?

- Primeira posição: 26 opções
- Segunda posição: 26 opções
- Terceira posição: 26 opções
- Quarta posição: 10 opções
- Quinta posição: 10 opções
- Sexta posição: 10 opções
- Sétima posição: 10 opções
- $$26^3 \times 10^4 = 6760000$$

Princípio básico de contagem

Outros exemplos

Um experimento consiste em lançarmos uma moeda 5 vezes seguidas e observarmos em cada lançamento se foi obtido cara ou coroa. Qual é o número de resultados possíveis deste experimento?

Princípio básico de contagem

Outros exemplos

Um experimento consiste em lançarmos uma moeda 5 vezes seguidas e observarmos em cada lançamento se foi obtido cara ou coroa. Qual é o número de resultados possíveis deste experimento?

Princípio básico de contagem

Outros exemplos

Um experimento consiste em lançarmos uma moeda 5 vezes seguidas e observarmos em cada lançamento se foi obtido cara ou coroa. Qual é o número de resultados possíveis deste experimento?

- ______, ______, ______, ______, ______

Princípio básico de contagem

Outros exemplos

Um experimento consiste em lançarmos uma moeda 5 vezes seguidas e observarmos em cada lançamento se foi obtido cara ou coroa. Qual é o número de resultados possíveis deste experimento?

- $\underline{\qquad}, \quad \underline{\qquad}, \quad \underline{\qquad}, \quad \underline{\qquad}, \quad \underline{\qquad}$
- $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$

Princípio básico de contagem

Para praticar:

- Quantas placas de carro seriam possíveis se a repetição entre letras é proibida mas entre números é permitida?

Arranjos, Permutações e Combinações

Arranjos

Arranjos com repetição

Seja M um conjunto com n elementos $(a_1, \cdots, a_n)$. Chamamos arranjo com repetição dos n elementos tomados r a r, a toda r-upla **ordenada** formada com elementos de M (**não necessariamente distintos**).

Arranjos
Arranjos com repetição

Seja M um conjunto com n elementos $(a_1, \cdots, a_n)$. Chamamos arranjo com repetição dos n elementos tomados r a r, a toda r-upla **ordenada** formada com elementos de M (**não necessariamente distintos**).

$$A_n^r = n^r$$

Arranjos

Arranjos com repetição

Seja M um conjunto com n elementos $(a_1, \cdots, a_n)$. Chamamos arranjo com repetição dos n elementos tomados r a r, a toda r-upla **ordenada** formada com elementos de M (**não necessariamente distintos**).

$$A_n^r = n^r$$

Arranjos (sem repetição)

Seja M um conjunto com n elementos $(a_1, \cdots, a_n)$. Chamamos arranjo dos n elementos tomados r a r, a toda r-upla **ordenada** formada com elementos **distintos** de M.

Arranjos

Arranjos com repetição

Seja M um conjunto com n elementos $(a_1, \cdots, a_n)$. Chamamos arranjo com repetição dos n elementos tomados r a r, a toda r-upla **ordenada** formada com elementos de M (**não necessariamente distintos**).

$$A_n^r = n^r$$

Arranjos (sem repetição)

Seja M um conjunto com n elementos $(a_1, \cdots, a_n)$. Chamamos arranjo dos n elementos tomados r a r, a toda r-upla **ordenada** formada com elementos **distintos** de M.

$$A_n^r = n \times (n-1) \times \cdots (n-r+1)$$

Permutações

Suponha que temos 3 livros diferentes: Cálculo (C), Estatística (E) e Investimentos (I). Os livros podem ser ordenados da seguinte forma

Permutações

Suponha que temos 3 livros diferentes: Cálculo (C), Estatística (E) e Investimentos (I). Os livros podem ser ordenados da seguinte forma

	Livro 1	Livro 2	Livro 3
Config.1	C	E	I
Config.2	C	I	E
Config.3	I	C	E
Config.4	I	E	C
Config.5	E	I	C
Config.6	E	C	I

Permutações

E se tivermos 4 livros: Cálculo (C), Estatística (E), Investimentos (I) e Gestão de Processos (G)?

Permutações

E se tivermos 4 livros: Cálculo (C), Estatística (E), Investimentos (I) e Gestão de Processos (G)?

	Livro 1	Livro 2	Livro 3	Livro 4
Config.1	C	E	I	G
Config.2	C	E	G	I
Config.3	C	G	E	I
Config.4	G	C	E	I
Config.5	G	C	I	E
Config.6	C	G	I	E
Config.7	C	I	G	E
Config.8	C	I	E	G
Config.9	I	C	E	G
Config.10	I	C	G	E
Config.11	I	G	C	E

Permutações

	Livro 1	Livro 2	Livro 3	Livro 4
Config.12	G	I	C	E
Config.13	G	I	E	C
Config.14	I	G	E	C
Config.15	I	E	G	C
Config.16	I	E	C	G
Config.17	E	I	C	G
Config.18	E	I	G	C
Config.19	E	G	I	C
Config.20	G	E	I	C
Config.21	G	E	C	I
Config.22	E	G	C	I
Config.23	E	C	G	I
Config.24	E	C	I	G

Permutações

E se tivermos 5, 6, ...89 livros?

Permutações

E se tivermos 5, 6, ...89 livros?

O número de maneiras de ordenar n objetos distintos é $n!$ (n fatorial)

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = n!,$$

Permutações

E se tivermos 5, 6, ...89 livros?

O número de maneiras de ordenar n objetos distintos é $n!$ (n fatorial)

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = n!,$$

Permutação

Seja M um conjunto com n elementos. Chamamos de permutação (dos n elementos) a todo arranjo (sem reposição) em que $r = n$.

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = n!$$

Permutações

Exemplo

Em uma disputa por pênaltis entre Botafogo e Fluminense, o técnico do Botafogo escolhe os 5 jogadores mas ainda não tem certeza da ordem na qual os jogadores irão chutar os pênaltis. De quantas formas diferentes essa ordenação pode ser feita?

- De quantas formas podemos ordenar os 5 jogadores do botafogo?

Permutações

Exemplo

Em uma disputa por pênaltis entre Botafogo e Fluminense, o técnico do Botafogo escolhe os 5 jogadores mas ainda não tem certeza da ordem na qual os jogadores irão chutar os pênaltis. De quantas formas diferentes essa ordenação pode ser feita?

- De quantas formas podemos ordenar os 5 jogadores do botafogo?
- $P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Permutações

Exemplo

Quantos anagramas podemos formar com a palavra AMOR?

Permutações

Exemplo

Quantos anagramas podemos formar com a palavra AMOR?

Permutações

Exemplo

Quantos anagramas podemos formar com a palavra AMOR?

Permutações

Exemplo

Quantos anagramas podemos formar com a palavra AMOR?

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Permutações

Para praticar:

No exemplo dos pênaltis, o técnico do botafogo escolhe 2 jogadores para chutar o primeiro e último pênalti, mas ainda está na dúvida quem chutara o primeiro penâlti e quem o último pênalti. Além disso, ele ainda está na duvida sobre a ordem que os 3 jogadores do meio chutarão os pênalties.

De quantas formas diferentes a ordenação (total) pode ser feita?

Combinações

Agora estamos interessados em determinar o número de grupos diferentes de r objetos que podem ser formados a partir de um total de n objetos distintos.

Combinações

Agora estamos interessados em determinar o número de grupos diferentes de r objetos que podem ser formados a partir de um total de n objetos distintos.

- Sejam $n = 5$ objetos distintos (A, B, C, D, E) e queremos selecionar grupos de $r = 3$.

Combinações

Agora estamos interessados em determinar o número de grupos diferentes de r objetos que podem ser formados a partir de um total de n objetos distintos.

- Sejam $n = 5$ objetos distintos (A, B, C, D, E) e queremos selecionar grupos de $r = 3$.
- Se a ordem fosse importante teríamos: $5 \times 4 \times 3 = 60$ formas diferentes de selecionar os grupos de 3. (A_5^3)

Combinações

Agora estamos interessados em determinar o número de grupos diferentes de r objetos que podem ser formados a partir de um total de n objetos distintos.

- Sejam $n = 5$ objetos distintos (A, B, C, D, E) e queremos selecionar grupos de $r = 3$.
- Se a ordem fosse importante teríamos: $5 \times 4 \times 3 = 60$ formas diferentes de selecionar os grupos de 3. (A_5^3)
- Mas, neste problema a ordem dos elementos é irrelevante (ABC .... BCA são na verdade um mesmo grupo)

Combinações

Agora estamos interessados em determinar o número de grupos diferentes de r objetos que podem ser formados a partir de um total de n objetos distintos.

- Sejam $n = 5$ objetos distintos (A, B, C, D, E) e queremos selecionar grupos de $r = 3$.
- Se a ordem fosse importante teríamos: $5 \times 4 \times 3 = 60$ formas diferentes de selecionar os grupos de 3. (A_5^3)
- Mas, neste problema a ordem dos elementos é irrelevante (ABC .... BCA são na verdade um mesmo grupo)
- Para evitar que, por exemplo o grupo formado por ABC seja contado 3! vezes, precisamos remover o efeito da ordem.

Combinações

Agora estamos interessados em determinar o número de grupos diferentes de r objetos que podem ser formados a partir de um total de n objetos distintos.

- Sejam $n = 5$ objetos distintos (A, B, C, D, E) e queremos selecionar grupos de $r = 3$.
- Se a ordem fosse importante teríamos: $5 \times 4 \times 3 = 60$ formas diferentes de selecionar os grupos de 3. (A_5^3)
- Mas, neste problema a ordem dos elementos é irrelevante (ABC .... BCA são na verdade um mesmo grupo)
- Para evitar que, por exemplo o grupo formado por ABC seja contado 3! vezes, precisamos remover o efeito da ordem.
- Então, o número de grupos diferentes de $r = 3$ objetos que podem ser formados de um total de $n = 5$ objetos distintos é

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

Combinações

- Em geral, $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ representa o número de maneiras diferentes que um grupo de r elementos pode ser formado a partir de um total de n elementos distintos quando a ordem importa.

Combinações

- Em geral, $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ representa o número de maneiras diferentes que um grupo de r elementos pode ser formado a partir de um total de n elementos distintos quando a ordem importa.
- Como cada grupo de r items será contado $r!$ vezes, temos que o número de grupos **diferentes** de r itens que podem ser formados é dado por

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Combinações

- Em geral, $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ representa o número de maneiras diferentes que um grupo de r elementos pode ser formado a partir de um total de n elementos distintos quando a ordem importa.
- Como cada grupo de r items será contado $r!$ vezes, temos que o número de grupos **diferentes** de r itens que podem ser formados é dado por

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Combinações

- Em geral, $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ representa o número de maneiras diferentes que um grupo de r elementos pode ser formado a partir de um total de n elementos distintos quando a ordem importa.
- Como cada grupo de r items será contado $r!$ vezes, temos que o número de grupos **diferentes** de r itens que podem ser formados é dado por

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

- $\binom{n}{r}$: número de combinações possíveis de n objetos em grupos de r elementos.

Combinações

Combinação

Seja M um conjunto com n elementos $(a_1, \cdots, a_n)$. Chamamos de combinação dos n elementos tomados r a r, a todo subconjunto de M constituido de r elementos **diferentes**.

Combinações

Combinação

Seja M um conjunto com n elementos $(a_1, \cdots, a_n)$. Chamamos de combinação dos n elementos tomados r a r, a todo subconjunto de M constituido de r elementos **diferentes**.

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Combinações

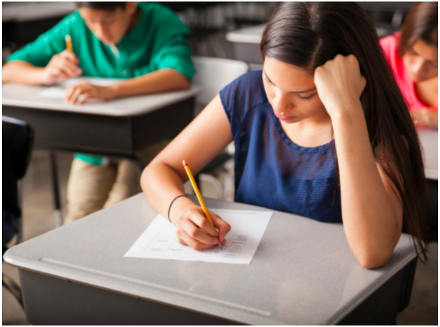
Exemplos

A P_1 de MAD211 possui 7 questões das quais o alumo deve escolher apenas 5. De quantas formas poderá escolher as 5 questões?

Combinações

Exemplos

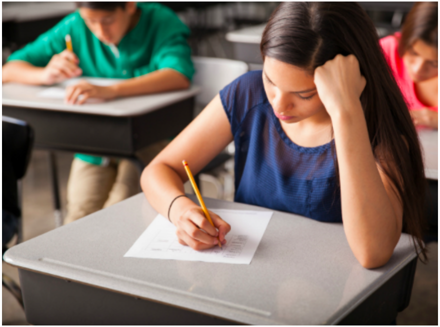
A P_1 de MAD211 possui 7 questões das quais o alumo deve escolher apenas 5. De quantas formas poderá escolher as 5 questões?



Combinações

Exemplos

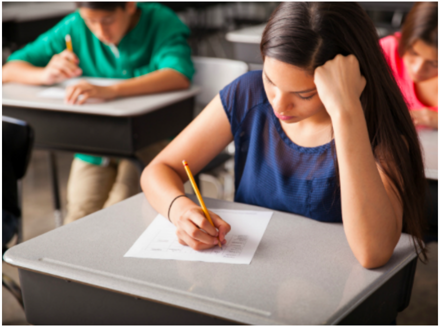
A P_1 de MAD211 possui 7 questões das quais o alumo deve escolher apenas 5. De quantas formas poderá escolher as 5 questões?



- Temos $n = 7$ questões e precisamos escolher apenas $r = 5$ questões

Combinações
Exemplos

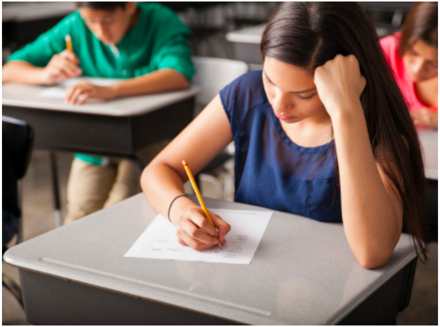
A P_1 de MAD211 possui 7 questões das quais o alumo deve escolher apenas 5. De quantas formas poderá escolher as 5 questões?



- Temos $n = 7$ questões e precisamos escolher apenas $r = 5$ questões
- A ordem como eu responder as perguntas importa? (muda minha nota?)

Combinações
Exemplos

A P_1 de MAD211 possui 7 questões das quais o alumo deve escolher apenas 5. De quantas formas poderá escolher as 5 questões?

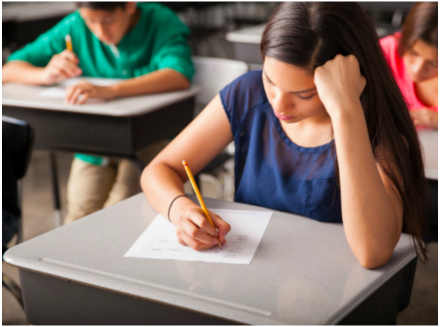


- Temos $n = 7$ questões e precisamos escolher apenas $r = 5$ questões
- A ordem como eu responder as perguntas importa? (muda minha nota?)
- Como a ordem não importa, estamos em um problema de *Combinação*

Combinações

Exemplos

A P_1 de MAD211 possui 7 questões das quais o alumo deve escolher apenas 5. De quantas formas poderá escolher as 5 questões?

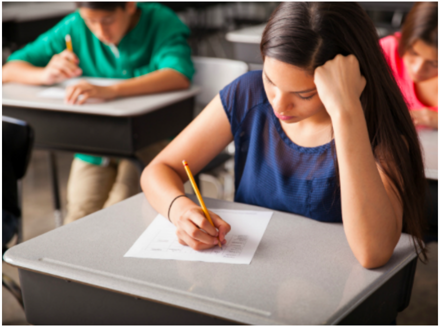


- Temos $n = 7$ questões e precisamos escolher apenas $r = 5$ questões
- A ordem como eu responder as perguntas importa? (muda minha nota?)
- Como a ordem não importa, estamos em um problema de *Combinação*

Combinações

Exemplos

A P_1 de MAD211 possui 7 questões das quais o alumo deve escolher apenas 5. De quantas formas poderá escolher as 5 questões?



- Temos $n = 7$ questões e precisamos escolher apenas $r = 5$ questões
- A ordem como eu responder as perguntas importa? (muda minha nota?)
- Como a ordem não importa, estamos em um problema de *Combinação*

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

Combinações

Exemplo

Uma sala possui 25 alun@s (15 mulheres e 10 homens), de quantas formas podemos selecionar 5 alunos de forma que 3 sejam mulheres e 2 homens?

- Temos $n = 25$ alun@s, dos quais $n_m = 15$ são mulheres e $n_h = 10$ são homens.

Combinações

Exemplo

Uma sala possui 25 alun@s (15 mulheres e 10 homens), de quantas formas podemos selecionar 5 alunos de forma que 3 sejam mulheres e 2 homens?

- Temos $n = 25$ alun@s, dos quais $n_m = 15$ são mulheres e $n_h = 10$ são homens.
- Queremos selecionar $r = 5$ alun@s, dos quais $r_m = 3$ sejam mulheres e $r_h = 2$ sejam homens.

Combinações

Exemplo

Uma sala possui 25 alun@s (15 mulheres e 10 homens), de quantas formas podemos selecionar 5 alunos de forma que 3 sejam mulheres e 2 homens?

- Temos $n = 25$ alun@s, dos quais $n_m = 15$ são mulheres e $n_h = 10$ são homens.
- Queremos selecionar $r = 5$ alun@s, dos quais $r_m = 3$ sejam mulheres e $r_h = 2$ sejam homens.
- Como a ordem em que os alun@s são selecionad@s não importa, estamos em um problema de *combinação*.

Combinações

Exemplo

Das $n_m = 15$ mulheres,
selecionamos $r_n = 3$.

$$\binom{15}{3} = \frac{15!}{3!(15-3)!} = 455$$

Combinações

Exemplo

Das $n_m = 15$ mulheres, selecionamos $r_n = 3$.

$$\binom{15}{3} = \frac{15!}{3!(15-3)!} = 455$$

Dos $n_h = 10$ homens, selecionamos $r_h = 2$.

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45$$

Combinações

Exemplo

Das $n_m = 15$ mulheres, selecionamos $r_n = 3$.

Dos $n_h = 10$ homens, selecionamos $r_h = 2$.

$$\binom{15}{3} = \frac{15!}{3!(15-3)!} = 455$$

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45$$

A forma como selecionamos os homens e as mulheres é independente, então pelo princípio multiplicativo:

Combinações

Exemplo

Das $n_m = 15$ mulheres, selecionamos $r_n = 3$.

$$\binom{15}{3} = \frac{15!}{3!(15-3)!} = 455$$

Dos $n_h = 10$ homens, selecionamos $r_h = 2$.

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45$$

A forma como selecionamos os homens e as mulheres é independente, então pelo princípio multiplicativo:

$$\binom{15}{3} \times \binom{10}{2} = 20475$$

Combinação ou Arranjo?

Combinações

Combinação ou Arranjo?

- Combinação: ordem não importa

Combinações

Combinação ou Arranjo?

- Combinação: ordem não importa
- Arranjo: ordem importa

Combinações

Combinação ou Arranjo?

- Combinação: ordem não importa
- Arranjo: ordem importa

Combinações

Combinação ou Arranjo?

- Combinação: ordem não importa
- Arranjo: ordem importa

Resumo

O número de maneiras de formar grupos de r elementos de um conjunto com n elementos **distintos**, dependendo se o mesmo objeto pode ser escolhido mais de uma vez (amostragem com ou sem reposição) e se a ordem com que os objetos são escolhidos importa ou não, pode ser resumida em:

Combinações

Combinação ou Arranjo?

- Combinação: ordem não importa
- Arranjo: ordem importa

Resumo

O número de maneiras de formar grupos de r elementos de um conjunto com n elementos **distintos**, dependendo se o mesmo objeto pode ser escolhido mais de uma vez (amostragem com ou sem reposição) e se a ordem com que os objetos são escolhidos importa ou não, pode ser resumida em:

	Ordem importa	Ordem não importa
Com reposição	n^r	$\binom{r+n-1}{r-1}$
Sem reposição	$n(n-1)\cdots(n-r+1)$	$\binom{n}{r}$

Coeficientes multinomiais

Coeficientes multinomiais

Considere o seguinte problema:

1. Um conjunto de n elementos **distintos** deve ser dividido em r grupos de tamanhos n_1, n_2, $\ldots$, n_r, respectivamente tais que $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$. De quantas formas possíveis isto pode ser feito?
2. Quantos anagramas podemos formar com a palavra MAMAE?

Embora os problema sejam distintos, a solução é dada pela mesma fórmula:

Coeficientes multinomiais

Considere o seguinte problema:

1. Um conjunto de n elementos **distintos** deve ser dividido em r grupos de tamanhos n_1, n_2, ..., n_r, respectivamente tais que $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$. De quantas formas possíveis isto pode ser feito?
2. Quantos anagramas podemos formar com a palavra MAMAE?

Embora os problema sejam distintos, a solução é dada pela mesma fórmula:

Resposta

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} = \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r}$$

formas diferentes.

Coeficientes multinomiais

Primeiro caso

- Para o primeiro grupo temos $\binom{n}{n_1}$ escolhas possíveis

Coeficientes multinomiais

Primeiro caso

- Para o primeiro grupo temos $\binom{n}{n_1}$ escolhas possíveis
- Para c/escolha do primeiro grupo temos $\binom{n-n_1}{n_2}$ escolhas possíveis para o segundo grupo.

Coeficientes multinomiais

Primeiro caso

- Para o primeiro grupo temos $\binom{n}{n_1}$ escolhas possíveis
- Para c/escolha do primeiro grupo temos $\binom{n-n_1}{n_2}$ escolhas possíveis para o segundo grupo.
- Para c/escolha dos dois primeiros grupos temos $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ escolhas possíveis para o terceiro grupo

Coeficientes multinomiais

Primeiro caso

- Para o primeiro grupo temos $\binom{n}{n_1}$ escolhas possíveis
- Para c/escolha do primeiro grupo temos $\binom{n-n_1}{n_2}$ escolhas possíveis para o segundo grupo.
- Para c/escolha dos dois primeiros grupos temos $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ escolhas possíveis para o terceiro grupo
- ...

Coeficientes multinomiais

Primeiro caso

- Para o primeiro grupo temos $\binom{n}{n_1}$ escolhas possíveis
- Para c/escolha do primeiro grupo temos $\binom{n-n_1}{n_2}$ escolhas possíveis para o segundo grupo.
- Para c/escolha dos dois primeiros grupos temos $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ escolhas possíveis para o terceiro grupo
- ...
- Para c/escolha dos $r-1$ primeiros grupos temos $\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$ escolhas possíveis para o $r-$ésimo grupo

Coeficientes multinomiais

Primeiro caso

- Para o primeiro grupo temos $\binom{n}{n_1}$ escolhas possíveis
- Para c/escolha do primeiro grupo temos $\binom{n-n_1}{n_2}$ escolhas possíveis para o segundo grupo.
- Para c/escolha dos dois primeiros grupos temos $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ escolhas possíveis para o terceiro grupo
- ...
- Para c/escolha dos $r-1$ primeiros grupos temos $\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$ escolhas possíveis para o $r-$ésimo grupo

Coeficientes multinomiais

Primeiro caso

- Para o primeiro grupo temos $\binom{n}{n_1}$ escolhas possíveis
- Para c/escolha do primeiro grupo temos $\binom{n-n_1}{n_2}$ escolhas possíveis para o segundo grupo.
- Para c/escolha dos dois primeiros grupos temos $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ escolhas possíveis para o terceiro grupo
- ...
- Para c/escolha dos $r-1$ primeiros grupos temos $\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$ escolhas possíveis para o $r-$ésimo grupo

Aplicando a versão generalizada do principio básico de contagem

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

Coeficientes multinomiais

Segundo caso

- Temos n elementos (mas apenas r são distintos. O elemento i, repete-se n_i vezes e $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$)

Coeficientes multinomiais

Segundo caso

- Temos n elementos (mas apenas r são distintos. O elemento i, repete-se n_i vezes e $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$)
- O número de formas de ordenar esses n elementos é $n!$

Coeficientes multinomiais

Segundo caso

- Temos n elementos (mas apenas r são distintos. O elemento i, repete-se n_i vezes e $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$)
- O número de formas de ordenar esses n elementos é $n!$
- Mas, por exemplo, $M^1A^1M^2A^2E$ e $M^2A^2M^1A^1E$ são idênticos

Coeficientes multinomiais

Segundo caso

- Temos n elementos (mas apenas r são distintos. O elemento i, repete-se n_i vezes e $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$)
- O número de formas de ordenar esses n elementos é n!
- Mas, por exemplo, $M^1A^1M^2A^2E$ e $M^2A^2M^1A^1E$ são idênticos
- Precisamos remover o efeito dessas configurações repetidas

Coeficientes multinomiais

Segundo caso

- Temos n elementos (mas apenas r são distintos. O elemento i, repete-se n_i vezes e $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$)
- O número de formas de ordenar esses n elementos é $n!$
- Mas, por exemplo, $M^1A^1M^2A^2E$ e $M^2A^2M^1A^1E$ são idênticos
- Precisamos remover o efeito dessas configurações repetidas
- Para c/conf teremos $n_1!$ formas de ordenar a letra 1, $n_2!$ formas de ordenar a letra 2, ... $n_r!$ formas de ordenar a letra r. (i.e $n_1!n_2! \cdots n_r!$ configurações repetidas)

Coeficientes multinomiais

Segundo caso

- Temos n elementos (mas apenas r são distintos. O elemento i, repete-se n_i vezes e $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$)
- O número de formas de ordenar esses n elementos é $n!$
- Mas, por exemplo, $M^1A^1M^2A^2E$ e $M^2A^2M^1A^1E$ são idênticos
- Precisamos remover o efeito dessas configurações repetidas
- Para c/conf teremos $n_1!$ formas de ordenar a letra 1, $n_2!$ formas de ordenar a letra 2, ... $n_r!$ formas de ordenar a letra r. (i.e $n_1!n_2!\cdots n_r!$ configurações repetidas)
- $$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} = \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r}$$

Coeficientes multinomiais

Segundo caso

- Temos n elementos (mas apenas r são distintos. O elemento i, repete-se n_i vezes e $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$)
- O número de formas de ordenar esses n elementos é $n!$
- Mas, por exemplo, $M^1A^1M^2A^2E$ e $M^2A^2M^1A^1E$ são idênticos
- Precisamos remover o efeito dessas configurações repetidas
- Para c/conf teremos $n_1!$ formas de ordenar a letra 1, $n_2!$ formas de ordenar a letra 2, ... $n_r!$ formas de ordenar a letra r. (i.e $n_1!n_2!\cdots n_r!$ configurações repetidas)
- $$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} = \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r}$$

Coeficientes multinomiais

Segundo caso

- Temos n elementos (mas apenas r são distintos. O elemento i, repete-se n_i vezes e $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$)
- O número de formas de ordenar esses n elementos é $n!$
- Mas, por exemplo, $M^1A^1M^2A^2E$ e $M^2A^2M^1A^1E$ são idênticos
- Precisamos remover o efeito dessas configurações repetidas
- Para c/conf teremos $n_1!$ formas de ordenar a letra 1, $n_2!$ formas de ordenar a letra 2, ... $n_r!$ formas de ordenar a letra r. (i.e $n_1!n_2!\cdots n_r!$ configurações repetidas)
- $$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} = \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r}$$

Este caso é conhecido como permutação com repetição.

Coeficientes multinomiais

Exemplo

Quantos anagramas podemos formar com a palavra MATEMATICA?

Coeficientes multinomiais

Exemplo

Quantos anagramas podemos formar com a palavra MATEMATICA?

- MATEMATICA: 10 caracteres ($n = 10$)

Coeficientes multinomiais

Exemplo

Quantos anagramas podemos formar com a palavra MATEMATICA?

- MATEMATICA: 10 caracteres ($n = 10$)
- M: se repete 2 vezes ($n_m = 2$)

Coeficientes multinomiais

Exemplo

Quantos anagramas podemos formar com a palavra MATEMATICA?

- MATEMATICA: 10 caracteres ($n = 10$)
- M: se repete 2 vezes ($n_m = 2$)
- A: se repete 3 vezes ($n_a = 3$)

Coeficientes multinomiais

Exemplo

Quantos anagramas podemos formar com a palavra MATEMATICA?

- MATEMATICA: 10 caracteres ($n = 10$)
- M: se repete 2 vezes ($n_m = 2$)
- A: se repete 3 vezes ($n_a = 3$)
- T: se repte 2 vezes ($n_t = 2$)

Coeficientes multinomiais

Exemplo

Quantos anagramas podemos formar com a palavra MATEMATICA?

- MATEMATICA: 10 caracteres ($n = 10$)
- M: se repete 2 vezes ($n_m = 2$)
- A: se repete 3 vezes ($n_a = 3$)
- T: se repte 2 vezes ($n_t = 2$)
- $n_e = 1$, $n_i = 1$ e $n_c = 1$

Coeficientes multinomiais

Exemplo

Quantos anagramas podemos formar com a palavra MATEMATICA?

- MATEMATICA: 10 caracteres ($n = 10$)
- M: se repete 2 vezes ($n_m = 2$)
- A: se repete 3 vezes ($n_a = 3$)
- T: se repte 2 vezes ($n_t = 2$)
- $n_e = 1$, $n_i = 1$ e $n_c = 1$

Coeficientes multinomiais

Exemplo

Quantos anagramas podemos formar com a palavra MATEMATICA?

- MATEMATICA: 10 caracteres ($n = 10$)
- M: se repete 2 vezes ($n_m = 2$)
- A: se repete 3 vezes ($n_a = 3$)
- T: se repte 2 vezes ($n_t = 2$)
- $n_e = 1$, $n_i = 1$ e $n_c = 1$

Então,

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} = \frac{10!}{2! \times 3! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1!} = 151200$$

Coeficientes multinomiais

Exemplo

Uma urna contém 3 bolas verdes e 2 bolas azuis. Elas são extraídas uma a uma (sem reposição). Quantas sequências de cores podemos observar?

Coeficientes multinomiais

Exemplo

Uma urna contém 3 bolas verdes e 2 bolas azuis. Elas são extraídas uma a uma (sem reposição). Quantas sequências de cores podemos observar?

- Estamos interessados na sequência de cores (ou seja **a ordem importa**)

Coeficientes multinomiais

Exemplo

Uma urna contém 3 bolas verdes e 2 bolas azuis. Elas são extraídas uma a uma (sem reposição). Quantas sequências de cores podemos observar?

- Estamos interessados na sequência de cores (ou seja **a ordem importa**)
- Temos $n = 5$ bolas mas $n_v = 3$ são verdes e $n_a = 2$ sñao azuis.

Coeficientes multinomiais

Exemplo

Uma urna contém 3 bolas verdes e 2 bolas azuis. Elas são extraídas uma a uma (sem reposição). Quantas sequências de cores podemos observar?

- Estamos interessados na sequência de cores (ou seja **a ordem importa**)
- Temos $n = 5$ bolas mas $n_v = 3$ são verdes e $n_a = 2$ sñao azuis.
- $Verde_1, Azul_1, Verde_2, Verde_3, Azul_2$ e $Verde_3, Azul_2, Verde_1, Verde_2, Azul_1$ são sequências de cores idênticas.

Coeficientes multinomiais

Exemplo

Uma urna contém 3 bolas verdes e 2 bolas azuis. Elas são extraídas uma a uma (sem reposição). Quantas sequências de cores podemos observar?

- Estamos interessados na sequência de cores (ou seja **a ordem importa**)
- Temos $n = 5$ bolas mas $n_v = 3$ são verdes e $n_a = 2$ sñao azuis.
- $Verde_1, Azul_1, Verde_2, Verde_3, Azul_2$ e $Verde_3, Azul_2, Verde_1, Verde_2, Azul_1$ são sequências de cores idênticas.
- Estamos no caso de permutação com repetição, então

$$\frac{5!}{3!2!} = 10$$

Coeficientes multinomiais

Exemplo

Em uma turma de 23 alunos, serão formados 3 grupos (A, B e C) com 8, 8 e 7 alunos, respectivamente. De quantas formas diferentes podem ser formados os grupos?

Coeficientes multinomiais

Exemplo

Em uma turma de 23 alunos, serão formados 3 grupos (A, B e C) com 8, 8 e 7 alunos, respectivamente. De quantas formas diferentes podem ser formados os grupos?

- Estamos no caso de dividir $n = 23$ elementos em $r = 3$ grupos onde o grupo 1 tem $n_1 = 8$ elementos, o grupo 2 $n_2 = 8$ elementos e o grupo 3 $n_3 = 7$ elementos.

Coeficientes multinomiais

Exemplo

Em uma turma de 23 alunos, serão formados 3 grupos (A, B e C) com 8, 8 e 7 alunos, respectivamente. De quantas formas diferentes podem ser formados os grupos?

- Estamos no caso de dividir $n = 23$ elementos em $r = 3$ grupos onde o grupo 1 tem $n_1 = 8$ elementos, o grupo 2 $n_2 = 8$ elementos e o grupo 3 $n_3 = 7$ elementos.
- Então

$$\frac{23!}{8!8!7!} = 3155170590$$

Soluções de equações inteiras

Número de soluções de equações inteiras

Caso 1: O melhor alun@ da turma de MAD211 ganha um voucher de 5 coxinhas do Bar do Luizão, que por sua vez possui 8 sabores diferentes de coxinha. De quantas formas o alun@ pode selecionar as 5 coxinhas?

Número de soluções de equações inteiras

Caso 1: O melhor alun@ da turma de MAD211 ganha um voucher de 5 coxinhas do Bar do Luizão, que por sua vez possui 8 sabores diferentes de coxinha. De quantas formas o alun@ pode selecionar as 5 coxinhas?

- **Opcão A:** Arranjo (ordem importa)

Número de soluções de equações inteiras

Caso 1: O melhor alun@ da turma de MAD211 ganha um voucher de 5 coxinhas do Bar do Luizão, que por sua vez possui 8 sabores diferentes de coxinha. De quantas formas o alun@ pode selecionar as 5 coxinhas?

- **Opcão A:** Arranjo (ordem importa)
- **Opção B:** Combinação (ordem não importa)

Número de soluções de equações inteiras

Caso 1: O melhor alun@ da turma de MAD211 ganha um voucher de 5 coxinhas do Bar do Luizão, que por sua vez possui 8 sabores diferentes de coxinha. De quantas formas o alun@ pode selecionar as 5 coxinhas?

- **Opcão A:** Arranjo (ordem importa)
- **Opção B:** Combinação (ordem não importa)
- **Opção C:** Nenhuma das anteriores

Número de soluções de equações inteiras

- x_1: número de coxinhas do sabor 1

Número de soluções de equações inteiras

- x_1: número de coxinhas do sabor 1
- x_2: número de coxinhas do sabor 2

Número de soluções de equações inteiras

- x_1: número de coxinhas do sabor 1
- x_2: número de coxinhas do sabor 2
- $\dots$

Número de soluções de equações inteiras

- x_1: número de coxinhas do sabor 1
- x_2: número de coxinhas do sabor 2
- $\ldots$
- x_8: número de coxinhas do sabor 8

Número de soluções de equações inteiras

- x_1: número de coxinhas do sabor 1
- x_2: número de coxinhas do sabor 2
- $\dots$
- x_8: número de coxinhas do sabor 8

Número de soluções de equações inteiras

- x_1: número de coxinhas do sabor 1
- x_2: número de coxinhas do sabor 2
- $\cdots$
- x_8: número de coxinhas do sabor 8

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5 \quad (1)$$

Número de soluções de equações inteiras

- x_1: número de coxinhas do sabor 1
- x_2: número de coxinhas do sabor 2
- $\cdots$
- x_8: número de coxinhas do sabor 8

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5 \tag{1}$$

Queremos a solução de (1) t.q $x_i \geq 0$

Número de soluções de equações inteiras

- x_1: número de coxinhas do sabor 1
- x_2: número de coxinhas do sabor 2
- $\cdots$
- x_8: número de coxinhas do sabor 8

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5 \tag{1}$$

Queremos a solução de (1) t.q $x_i \geq 0$

A ordem como pedimos as coxinhas importa?

Número de soluções de equações inteiras

- x_1: número de coxinhas do sabor 1
- x_2: número de coxinhas do sabor 2
- $\cdots$
- x_8: número de coxinhas do sabor 8

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5 \tag{1}$$

Queremos a solução de (1) t.q $x_i \geq 0$

A ordem como pedimos as coxinhas importa? Não

Número de soluções de equações inteiras

Caso 2: A fabrica de escrivaninhas "Marquesone" dispõe de 3 cores diferentes para pintar 7 escrivaninhas idênticas. De quantas formas isto pode ser feito?

Número de soluções de equações inteiras

Caso 2: A fabrica de escrivaninhas "Marquesone" dispõe de 3 cores diferentes para pintar 7 escrivaninhas idênticas. De quantas formas isto pode ser feito?

- x_1: número de escrivaninhas pintadas da cor 1
- x_2: número de escrivaninhas pintadas da cor 2
- x_3: número de escrivaninhas pintadas da cor 3

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \tag{2}$$

Número de soluções de equações inteiras

Caso 2: A fabrica de escrivaninhas “Marquesone” dispõe de 3 cores diferentes para pintar 7 escrivaninhas idênticas. De quantas formas isto pode ser feito?

- x_1: número de escrivaninhas pintadas da cor 1
- x_2: número de escrivaninhas pintadas da cor 2
- x_3: número de escrivaninhas pintadas da cor 3

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \tag{2}$$

Queremos a solução de (2) t.q $x_i \geq 0$

Número de soluções de equações inteiras

Caso 2: A fabrica de escrivaninhas "Marquesone" dispõe de 3 cores diferentes para pintar 7 escrivaninhas idênticas. De quantas formas isto pode ser feito?

- x_1: número de escrivaninhas pintadas da cor 1
- x_2: número de escrivaninhas pintadas da cor 2
- x_3: número de escrivaninhas pintadas da cor 3

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \tag{2}$$

Queremos a solução de (2) t.q $x_i \geq 0$

A ordem importa?

Número de soluções de equações inteiras

Caso 2: A fabrica de escrivaninhas "Marquesone" dispõe de 3 cores diferentes para pintar 7 escrivaninhas idênticas. De quantas formas isto pode ser feito?

- x_1: número de escrivaninhas pintadas da cor 1
- x_2: número de escrivaninhas pintadas da cor 2
- x_3: número de escrivaninhas pintadas da cor 3

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \tag{2}$$

Queremos a solução de (2) t.q $x_i \geq 0$

A ordem importa? Não, as escrivaninhas são idênticas

Número de soluções de equações inteiras

Caso 1:

O melhor alun@ da turma de MAD211 ganha um voucher de 5 coxinhas do Bar do Luizão, que por sua vez possui 8 sabores diferentes de coxinha. De quantas formas o alun@ pode selecionar as 5 coxinhas? (a ordem não importa)

Número de soluções de equações inteiras

Caso 1:

O melhor alun@ da turma de MAD211 ganha um voucher de 5 coxinhas do Bar do Luizão, que por sua vez possui 8 sabores diferentes de coxinha. De quantas formas o alun@ pode selecionar as 5 coxinhas? (a ordem não importa)

Reinterpretando De um total de $n = 5$ elementos (não necessariamente $\neq$), queremos formar $r = 8$ grupos de tamanhos $x_1, ..., x_8$ t.q $x_i \geq 0$.

Número de soluções de equações inteiras

Caso 1:

O melhor alun@ da turma de MAD211 ganha um voucher de 5 coxinhas do Bar do Luizão, que por sua vez possui 8 sabores diferentes de coxinha. De quantas formas o alun@ pode selecionar as 5 coxinhas? (a ordem não importa)

Reinterpretando De um total de $n = 5$ elementos (não necessariamente $\neq$), queremos formar $r = 8$ grupos de tamanhos $x_1, ..., x_8$ t.q $x_i \geq 0$.

Caso 2:

A fabrica de escrivaninhas "Marquesone" dispõe de 3 cores diferentes para pintar 7 escrivaninhas idênticas. De quantas formas isto pode ser feito?

Número de soluções de equações inteiras

Caso 1:

O melhor alun@ da turma de MAD211 ganha um voucher de 5 coxinhas do Bar do Luizão, que por sua vez possui 8 sabores diferentes de coxinha. De quantas formas o alun@ pode selecionar as 5 coxinhas? (a ordem não importa)

Reinterpretando De um total de $n = 5$ elementos (não necessariamente $\neq$), queremos formar $r = 8$ grupos de tamanhos $x_1, ..., x_8$ t.q $x_i \geq 0$.

Caso 2:

A fabrica de escrivaninhas "Marquesone" dispõe de 3 cores diferentes para pintar 7 escrivaninhas idênticas. De quantas formas isto pode ser feito?

Reinterpretando De um total de $n = 7$ elementos (idênticos, i.e a ordem não importa), queremos formar $r = 3$ grupos de tamanhos x_1, x_2, x_3 t.q $x_i \geq 0$.

Número de soluções de equações inteiras

Proposição 1

O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i \geq 0$ é

$$\binom{n+r-1}{r-1}$$

Número de soluções de equações inteiras

Proposição 1

O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i \geq 0$ é

$$\binom{n+r-1}{r-1}$$

Proposição 2

O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i > 0$ é

$$\binom{n-1}{r-1}$$

Número de soluções de equações inteiras

Exemplo

Você possui 15K (15 mil) reais para aplicar entre 3 investimentos possíveis (cada aplicação deve ser feita em unidades de 1K reais). Se os 15K devem ser investidos, quantas estratégias de investimento você tem?.

Número de soluções de equações inteiras

Exemplo

Você possui 15K (15 mil) reais para aplicar entre 3 investimentos possíveis (cada aplicação deve ser feita em unidades de 1K reais). Se os 15K devem ser investidos, quantas estratégias de investimento você tem?.

Estamos interessado no problema

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

com $x_i \geq 0$ (pois não somos obrigados a investir necessáriamente em cada tipo de investimento).

Número de soluções de equações inteiras

Exemplo

Você possui 15K (15 mil) reais para aplicar entre 3 investimentos possíveis (cada aplicação deve ser feita em unidades de 1K reais). Se os 15K devem ser investidos, quantas estratégias de investimento você tem?.

Estamos interessado no problema

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

com $x_i \geq 0$ (pois não somos obrigados a investir necessáriamente em cada tipo de investimento).

Temos $n = 15$ e $r = 3$, então

$$\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{15+3-1}{3-1} = \binom{17}{2} = 136$$

Voltando ao inicio

Um sistema de comunicação é formado por n antenas aparentemente idênticas que devem ser alinhadas em sequência. O sistema será funcional (i.e. capaz de receber qualquer sinal) se duas antenas consecutivas não apresentam defeito. Se m das n antenas apresentam defeito:

- n objetos idênticos dos quais m são defeituosos

Voltando ao inicio

Um sistema de comunicação é formado por n antenas aparentemente idênticas que devem ser alinhadas em sequência. O sistema será funcional (i.e. capaz de receber qualquer sinal) se duas antenas consecutivas não apresentam defeito. Se m das n antenas apresentam defeito:

- n objetos idênticos dos quais m são defeituosos
- $\underbrace{D \quad D \quad D \quad D \quad \cdots \quad D}_{\text{m-antenas defeituosas}}$

Voltando ao inicio

Um sistema de comunicação é formado por n antenas aparentemente idênticas que devem ser alinhadas em sequência. O sistema será funcional (i.e. capaz de receber qualquer sinal) se duas antenas consecutivas não apresentam defeito. Se m das n antenas apresentam defeito:

- n objetos idênticos dos quais m são defeituosos
- $\underbrace{D \quad D \quad D \quad D \quad \cdots \quad D}_{\text{m-antenas defeituosas}}$
- Colocamos as $n - m$ antenas não defeituosas nas $m + 1$ posições

$$x_1 \;\; D \;\; x_2 \;\; D \cdots x_m \;\; D \;\; x_{m+1}$$

Voltando ao inicio

Um sistema de comunicação é formado por n antenas aparentemente idênticas que devem ser alinhadas em sequência. O sistema será funcional (i.e. capaz de receber qualquer sinal) se duas antenas consecutivas não apresentam defeito. Se m das n antenas apresentam defeito:

- n objetos idênticos dos quais m são defeituosos
- $\underbrace{D \quad D \quad D \quad D \quad \cdots \quad D}_{\text{m-antenas defeituosas}}$
- Colocamos as $n-m$ antenas não defeituosas nas $m+1$ posições

$$x_1 \;\; D \;\; x_2 \;\; D \cdots x_m \;\; D \;\; x_{m+1}$$

- Precisamos

$$x_1 + ... + x_{m+1} = n - m$$

t.q $x_1, x_{m+1} \geq 0$ e $x_i > 0$ $i = 2, ..., m$

Voltando ao inicio

- Fazendo $y_1 = x_1 + 1$,

Voltando ao inicio

- Fazendo $y_1 = x_1 + 1$,
- $y_{m+1} = x_{m+1} + 1$,

Voltando ao inicio

- Fazendo $y_1 = x_1 + 1$,
- $y_{m+1} = x_{m+1} + 1$,
- $y_i = x_i \ (i = 2, ..., m)$

Voltando ao inicio

- Fazendo $y_1 = x_1 + 1$,
- $y_{m+1} = x_{m+1} + 1$,
- $y_i = x_i \; (i = 2, ..., m)$

Voltando ao inicio

- Fazendo $y_1 = x_1 + 1$,
- $y_{m+1} = x_{m+1} + 1$,
- $y_i = x_i \ (i = 2, ..., m)$

Então

$$x_1 + ... + x_{m+1} = n - m$$

t.q $x_1, x_{m+1} \geq 0$ e $x_i > 0 \ i = 2, ..., m$ é equivalente a

$$y_1 + ... + y_{m+1} = n - m + 2$$

t.q $y_i > 0$

Voltando ao inicio

Lembrando (proposição 2)

O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i > 0$ é

$$\binom{n-1}{r-1}$$

Voltando ao inicio

Lembrando (proposição 2)

O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i > 0$ é

$$\binom{n-1}{r-1}$$

Aplicando a fórmula:

$$\tbinom{n-m+2-1}{m+1-1} = \tbinom{n-m+1}{m}$$

Voltando ao inicio

Lembrando (proposição 2)

O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i > 0$ é

$$\binom{n-1}{r-1}$$

Aplicando a fórmula:

$$\tbinom{n-m+2-1}{m+1-1} = \tbinom{n-m+1}{m}$$

No caso particular de $n = 5$ e $m = 2$, então temos

$$\binom{5-2+1}{2} = 6$$

configurações funcionais.

Leituras recomendadas

- Anderson, D. R; Sweeney, D. J.; e Williams, T. A. (2008). *Estatística Aplicada à Administração e Economia*. 2ed. Cengage Learning. **Cap 4.1**
- Sheldon Ross (2010). *Probabilidade: Um curso moderno com aplicações*. 8ed, Bookman. **Cap 1.1 – 1.6**
- Degroot, M. H; e Schervish, M. J. (2012). *Probability and Statistics*. 4ed, Pearson. **Chapter 1.7–1.9**