ACA228 - Modelos de Regressão e Previsão

Regressão Linear Multipla: Verificando as hipóteses II

Prof. Carlos Trucíos
carlos.trucios@facc.ufrj.br
ctruciosm.github.io

Faculdade de Administração e Ciências Contábeis,
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Aula 14

Má-especificação funcional

Má-especificação funcional

Má-especificação funcional

Suponha que o modelo populacional é da forma

$$\log(wage) = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 exper + \beta_3 exper^2 + u$$

Mas na modelagem utilizamos

$$\log(wage) = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 exper + u$$

Ou seja, omitimos $exper^2$

Má-especificação funcional

Suponha que o modelo populacional é da forma

$$\log(wage) = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 exper + \beta_3 exper^2 + \beta_4 female + \beta_5 female * educ + u$$

Mas na modelagem utilizamos

$$\log(wage) = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 exper + \beta_3 exper^2 + \beta_4 female + u$$

Ou seja, omitimos $female * educ$

Má-especificação funcional

Suponha que o modelo populacional é da forma

$$\log(wage) = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 exper + \beta_3 exper^2 + \beta_4 female + \beta_5 female * educ + u$$

Mas na modelagem utilizarmos

$$wage = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 exper + \beta_3 exper^2 + \beta_4 female + \beta_5 female * educ + u$$

Ou seja, modelamos *wage* no lugar de $\log(wage)$

Má-especificação funcional

- Em todos os casos estamos enfrentando um problema de má-especificação da forma funcional

Má-especificação funcional

- Em todos os casos estamos enfrentando um problema de má-especificação da forma funcional
- Os $\hat{\beta}'s$ tendem a ser viesados, ou seja $\mathbb{E}(\hat{\beta}) \neq \beta$

Má-especificação funcional

- Em todos os casos estamos enfrentando um problema de má-especificação da forma funcional
- Os $\hat{\beta}'s$ tendem a ser viesados, ou seja $\mathbb{E}(\hat{\beta}) \neq \beta$
- Estudaremos algumas formas de detectar e corrigir este problema

Má-especificação funcional

- Em todos os casos estamos enfrentando um problema de má-especificação da forma funcional
- Os $\hat{\beta}'s$ tendem a ser viesados, ou seja $\mathbb{E}(\hat{\beta}) \neq \beta$
- Estudaremos algumas formas de detectar e corrigir este problema

Má-especificação funcional

- Em todos os casos estamos enfrentando um problema de má-especificação da forma funcional
- Os $\hat{\beta}'s$ tendem a ser viesados, ou seja $\mathbb{E}(\hat{\beta}) \neq \beta$
- Estudaremos algumas formas de detectar e corrigir este problema

Com detectar?

1. Incluir termos quadráticos (das variáveis que foram encontradas como estatísticamente significativas) na modelagem
2. Fazer um *teste F* onde $H_0 : \beta_{x_1^2} = 0, \ldots, \beta_{x_p^2} = 0$
3. Se rejeitarmos H_0 concluimos que pelo menos uma relação quadrática existe

Má-especificação funcional

```
library(wooldridge)
modelo = lm(narr86~pcnv + avgsen + ptime86 + qemp86
            + inc86 + black + hispan, data = crime1)
round(summary(modelo)$coef,5)
```

```
##             Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  0.56927    0.03605 15.79226  0.00000
## pcnv        -0.13283    0.04035 -3.29176  0.00101
## avgsen       0.00309    0.00469  0.65835  0.51037
## ptime86     -0.03901    0.00869 -4.48626  0.00001
## qemp86      -0.05097    0.01444 -3.53065  0.00042
## inc86       -0.00148    0.00034 -4.35252  0.00001
## black        0.32663    0.04542  7.19121  0.00000
## hispan       0.19478    0.03971  4.90512  0.00000
```

Má-especificação funcional

Variaveis estatísticamente significativas:

- pcnv
- ptime86
- qmp86 (qualitativa)
- inc86
- black (qualitativa)
- hispan (qualitativa)

Então vamos incluir no modelo:

- $pcnv^2$
- $ptime86^2$
- $inc86^2$

Por quê não incluimos as outras variaveis significativas?

Má-especificação funcional

```
##                 Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
## (Intercept)      0.50499    0.03684 13.70820  0.00000
## pcnv             0.55632    0.15423  3.60716  0.00032
## avgsen          -0.00270    0.00466 -0.58053  0.56160
## ptime86          0.28874    0.04425  6.52492  0.00000
## qemp86          -0.01457    0.01736 -0.83935  0.40135
## inc86           -0.00340    0.00080 -4.23553  0.00002
## black            0.29239    0.04484  6.52149  0.00000
## hispan           0.16436    0.03945  4.16628  0.00003
## I(pcnv^2)       -0.73376    0.15611 -4.70020  0.00000
## I(ptime86^2)    -0.02956    0.00386 -7.65156  0.00000
## I(inc86^2)       0.00001    0.00000  2.80504  0.00507
```

Má-especificação funcional

$$H_0 : \beta_{pcnv^2} = 0, \beta_{ptime86^2} = 0, \beta_{inc86^2} = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdade}$$

Má-especificação funcional

$$H_0 : \beta_{pcnv^2} = 0, \beta_{ptime86^2} = 0, \beta_{inc86^2} = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdade}$$

```
modeloi = lm(narr86~pcnv + avgsen + ptime86 + qemp86 +
             inc86 + black + hispan + I(pcnv^2) +
             I(ptime86^2)  + I(inc86^2), data = crime1)
```

Má-especificação funcional

$$H_0 : \beta_{pcnv^2} = 0, \beta_{ptime86^2} = 0, \beta_{inc86^2} = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdade}$$

```
modeloi = lm(narr86~pcnv + avgsen + ptime86 + qemp86 +
             inc86 + black + hispan + I(pcnv^2) +
             I(ptime86^2)  + I(inc86^2), data = crime1)
```

```
modelor = lm(narr86~pcnv + avgsen + ptime86 + qemp86
            + inc86 + black + hispan, data = crime1)
```

Má-especificação funcional

$$H_0: \beta_{pcnv^2} = 0, \beta_{ptime86^2} = 0, \beta_{inc86^2} = 0 \quad \text{vs} \quad H_1: H_0 \text{ não é verdade}$$

```
anova(modelor,modeloi)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: narr86 ~ pcnv + avgsen + ptime86 + qemp86 + inc86 + b
## Model 2: narr86 ~ pcnv + avgsen + ptime86 + qemp86 + inc86 + b
##     I(pcnv^2) + I(ptime86^2) + I(inc86^2)
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F    Pr(>F)
## 1   2717 1866.1
## 2   2714 1803.5  3    62.602 31.403 < 2.2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Má-especificação funcional

- Os termos quadráticos são (individualmente e em conjunto) estatísticamente significativos
- Parece que o modelo inicial deixou de fora algumas não linearidades no modelo, que foram capturadas quando incluimos os quadrados
- Incluimos apenas quadrados das variáveis, mas outros tipos de não linearidades não foram considerados
- Existem testes que nos ajudam nesse sentido

Má-especificação funcional: Teste RESET

Se o modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + u$$

satisfazer HRML4 ($E(u|X) = 0$) nenhuma função não linear das $x's$ deve ser significativa quando incluidas na regressão.

Má-especificação funcional: Teste RESET

Se o modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + u$$

satisfazer HRML4 ($E(u|X) = 0$) nenhuma função não linear das $x's$ deve ser significativa quando incluidas na regressão.

Então se ajustarmos o modelo (note que $\hat{y} = X'\hat{\beta}$)

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + \delta_1 \hat{y}^2 + \delta_2 \hat{y}^3 + u \qquad (1)$$

δ_1 e δ_2 deveriam ser 0

Má-especificação funcional: Teste RESET

Se o modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + u$$

satisfazer HRML4 ($E(u|X) = 0$) nenhuma função não linear das $x's$ deve ser significativa quando incluidas na regressão.

Então se ajustarmos o modelo (note que $\hat{y} = X'\hat{\beta}$)

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + \delta_1 \hat{y}^2 + \delta_2 \hat{y}^3 + u \qquad (1)$$

δ_1 e δ_2 deveriam ser 0

O Teste RESET, utiliza a estatística F para testar

$$H_0 : \delta_1 = 0, \delta_2 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdade}$$

Má-especificação funcional: Teste RESET

```
modelo = lm(price~lotsize+sqrft+bdrms, data = hprice1)
yhat = fitted(modelo)
modelofull = lm(price~lotsize+sqrft+bdrms +
                  I(yhat^2)+I(yhat^3), data = hprice1)
anova(modelo,modelofull)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: price ~ lotsize + sqrft + bdrms
## Model 2: price ~ lotsize + sqrft + bdrms + I(yhat^2) + I(yhat
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F  Pr(>F)
## 1     84 300724
## 2     82 269984  2     30740 4.6682 0.01202 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' '
```

Má-especificação funcional: Teste RESET

- No slide anterior rejeitamos H_0 com um nível de significância de 0.05
- Precisamos testar outras formas funcionais
- Na prática é dificil descobrir a forma funcional exata
- Uma das primeiras coisas que devemos fazer é testar o $\log(\cdot)$
- $\log(\cdot)$ e funções quadráticas costumam resolver o problema

Má-especificação funcional: Teste RESET

```
modelo = lm(log(price)~log(lotsize)+log(sqrft)+bdrms, data = hpr
yhat = fitted(modelo)
modelofull = lm(log(price)~log(lotsize)+log(sqrft)+bdrms +
                  I(yhat^2)+I(yhat^3), data = hprice1)
anova(modelo,modelofull)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: log(price) ~ log(lotsize) + log(sqrft) + bdrms
## Model 2: log(price) ~ log(lotsize) + log(sqrft) + bdrms + I(yh
##     I(yhat^3)
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq     F  Pr(>F)
## 1     84 2.8626
## 2     82 2.6940  2   0.16854 2.565 0.08308 .
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Má-especificação funcional: Gráficos

- O que acontece se identificarmos problemas de má-espeficicação e $\log(\cdot)$ não resolve?

Má-especificação funcional: Gráficos

- O que acontece se identificarmos problemas de má-espeficicação e $\log(\cdot)$ não resolve?
- Análise de resíduos podem nos auxiliar nesta tarefa

Má-especificação funcional: Gráficos

- O que acontece se identificarmos problemas de má-espeficicação e $\log(\cdot)$ não resolve?
- Análise de resíduos podem nos auxiliar nesta tarefa
- Quando temos poucas variáveis independêntes é super útil

Má-especificação funcional: Gráficos

- O que acontece se identificarmos problemas de má-espeficicação e $\log(\cdot)$ não resolve?
- Análise de resíduos podem nos auxiliar nesta tarefa
- Quando temos poucas variáveis independêntes é super útil
- Quando temos muitas variávais independêntes essa tarefa pode ser bastante *cansativa*

Má-especificação funcional: Gráficos

dadossim corresponde a um conjunto de dados simulados da forma

$$y = 0.8 + 0.7x - 0.3x^2 + u$$

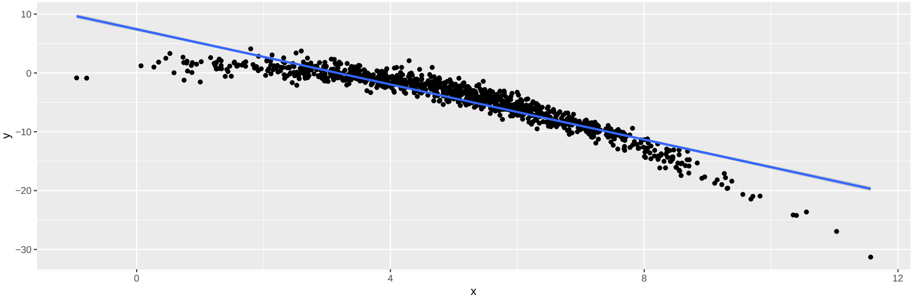
```
modelo = lm(y~x, data = dadossim)
round(summary(modelo)$coef,6)
```

```
##              Estimate Std. Error   t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  7.422715   0.161544  45.94852        0
## x           -2.343701   0.029898 -78.38870        0
```

```
summary(modelo)$r.squared
```

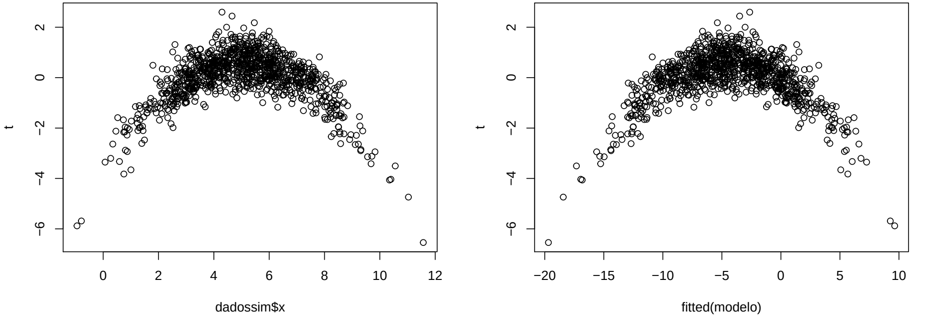
```
## [1] 0.8602787
```

Má-especificação funcional: Gráficos



Má-especificação funcional: Gráficos

```
t = rstudent(modelo) # studentized residuals
par(mfrow=c(1,2))
plot(dadossim$x,t)
plot(fitted(modelo),t)
```



Má-especificação funcional: Gráficos

$$y = 0.8 + 0.7x - 0.3x^2 + u$$

```
modelo2 = lm(y~x+I(x^2), data = dadossim)
round(summary(modelo2)$coef,6)
```

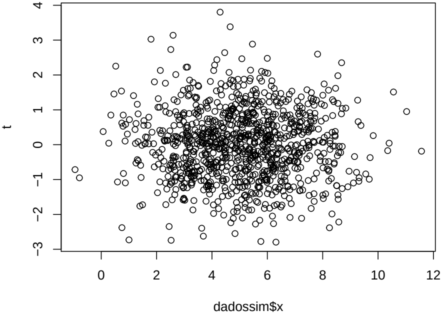
```
##              Estimate Std. Error    t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  0.785679   0.165259   4.754231    2e-06
## x            0.699301   0.065885  10.613913    0e+00
## I(x^2)      -0.298790   0.006263 -47.708462    0e+00
```

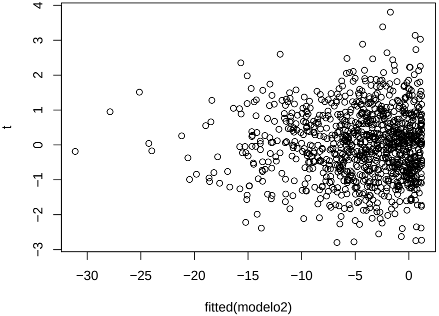
```
summary(modelo2)$r.squared
```

```
## [1] 0.9574403
```

Má-especificação funcional: Gráficos

```
t = rstudent(modelo2) # studentized residuals
par(mfrow=c(1,2))
plot(dadossim$x,t)
plot(fitted(modelo2),t)
```





Má-especificação funcional: Gráficos

$$y = 0.8 + 0.7x_1 - 0.3x_1^2 + 0.8x_2 + u$$

```r
modelo = lm(y~x1, data = dadossim)
round(summary(modelo)$coef,6)
```

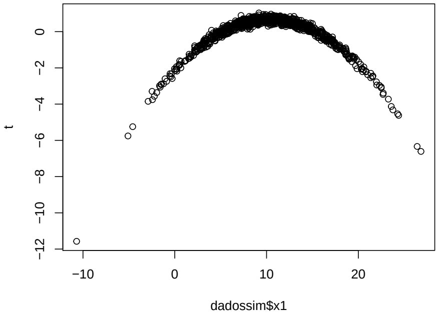
```
##              Estimate Std. Error   t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 35.030281   0.810521  43.21944        0
## x1          -5.479414   0.071735 -76.38423        0
```

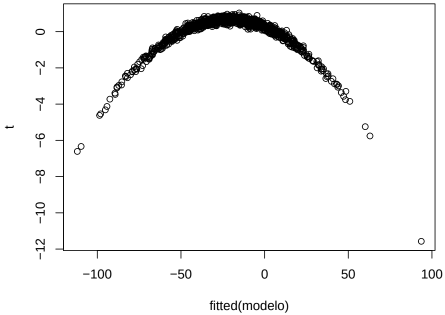
```r
summary(modelo)$r.squared
```

```
## [1] 0.8539345
```

Má-especificação funcional: Gráficos

```
t = rstudent(modelo) # studentized residuals
par(mfrow = c(1,2))
plot(dadossim$x1,t)
plot(fitted(modelo),t)
```





Má-especificação funcional: Gráficos

$$y = 0.8 + 0.7x_1 - 0.3x_1^2 + 0.8x_2 + u$$

```
modelo2 = lm(y~x1+I(x1^2), data = dadossim)
round(summary(modelo2)$coef,6)
```

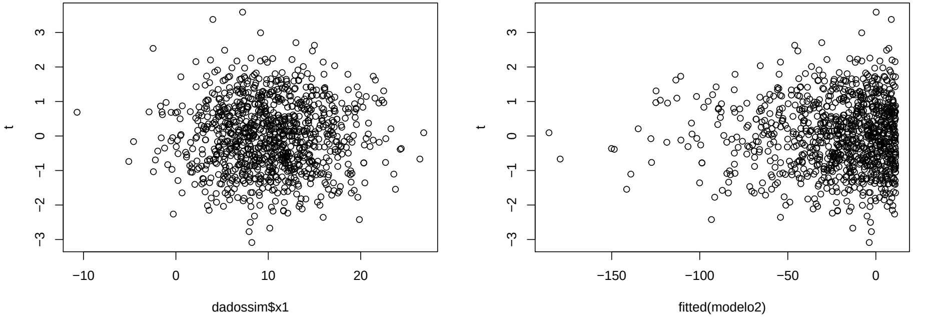
```
##                Estimate Std. Error    t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 10.864774   0.151390   71.76698        0
## x1           0.671619   0.028293   23.73818        0
## I(x1^2)     -0.298055   0.001288 -231.43891        0
```

```
summary(modelo2)$r.squared
```

```
## [1] 0.9973309
```

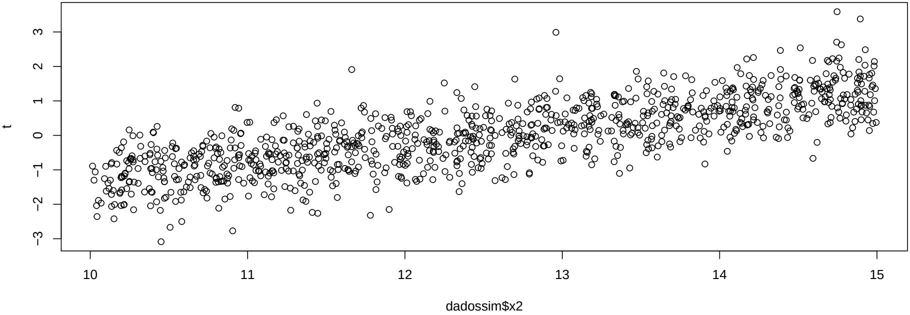
Má-especificação funcional: Gráficos

```
t = rstudent(modelo2) # studentized residuals
par(mfrow = c(1,2))
plot(dadossim$x1,t)
plot(fitted(modelo2),t)
```



Má-especificação funcional: Gráficos para variaveis omitidas

```
t = rstudent(modelo2) # studentized  residuals
plot(dadossim$x2,t)
```



Má-especificação funcional: Gráficos

$$y = 0.8 + 0.7x_1 - 0.3x_1^2 + 0.8x_2 + u$$

```
modelo3 = lm(y~x1+I(x1^2) + x2, data = dadossim)
round(summary(modelo3)$coef,6)
```

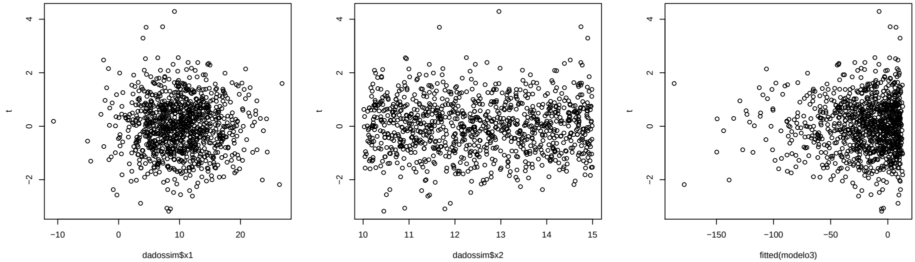
```
##              Estimate Std. Error    t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  0.547949   0.286622   1.911749 0.056195
## x1           0.703522   0.018042  38.993452 0.000000
## I(x1^2)     -0.300041   0.000822 -365.011250 0.000000
## x2           0.818317   0.021409  38.223042 0.000000
```

```
summary(modelo3)$r.squared
```

```
## [1] 0.998918
```

Má-especificação funcional: Gráficos

```
t = rstudent(modelo3)
par(mfrow = c(1,3))
plot(dadossim$x1,t)
plot(dadossim$x2,t)
plot(fitted(modelo3),t)
```



Má-especificação funcional: Gráficos

$$y = 0.8 + 0.7x_1 - 0.3x_1^2 + u$$

```
modelo = lm(y~x1+I(x1^2), data = dadossim)
round(summary(modelo)$coef,6)
```

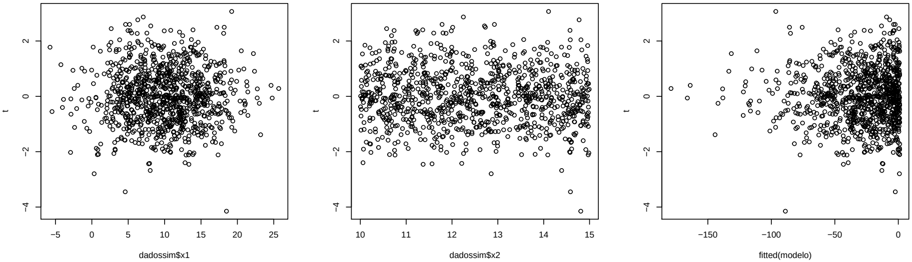
```
##                Estimate Std. Error     t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  0.694330   0.101670    6.829233        0
## x1           0.711458   0.019888   35.772982        0
## I(x1^2)     -0.300197   0.000942 -318.597297        0
```

```
summary(modelo)$r.squared
```

```
## [1] 0.9986463
```

Má-especificação funcional: Gráficos

```
t = rstudent(modelo)
par(mfrow = c(1,3))
plot(dadossim$x1,t)
plot(dadossim$x2,t)
plot(fitted(modelo),t)
```



Resumo do processo de modelagem

0. EDA: Detectar outliers, definir formas funcionais, uma primeira olhada aos dados.
1. Ajustar o modelo de regressão.
2. Verificar outliers e forma funcional ($\hat{y}$ vs residuos ou X_j vs residuos).
3. Verificar variáveis omitidas (variaveis ominita vs residuos).
4. Verificar homocedasticidade: se tivermos evidencia de heterocedasticidade, calcular a variância dos β's de forma robusta (estimador de White).
5. Verificar não correlação dos erros (gráfico ACF)
6. Verificar Normalidade* (grafico de probabilidade normal)
7. Interpretar os parametros e fazer inferência estatística (Usar as versões robustas dos testes t e F se necessário)

Leituras recomendadas

Leituras recomendadas

- Wooldridge, Jeffrey M. *Introdução à Econometria: Uma abordagem moderna*. (2016). Cengage Learning. – **Cap 9**